

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2010.01.025

## 跟随伺服控制系统的输入—状态稳定性

刘启辉, 向学辅

(中国兵器工业第五八研究所 军品部, 四川 绵阳 621000)

**摘要:** 针对跟随控制系统和“领导者”智能体队形控制系统相似的特点, 通过输入-状态稳定性 (Input-to-State Stability ISS) 分析了跟随控制系统的稳定性, 验证系统控制器的性能。跟随控制系统由主动系统和跟随系统构成, 跟随系统按照确定的跟随模型跟随主动系统。跟随控制系统输入-状态稳定性把主动系统的控制输入与跟随控制系统内部状态联系起来, 并描述了控制输入对系统稳定性能的影响方式。相对其他分析法, 采用 ISS 分析跟随系统的稳定性具有不依赖于误差传播的衰减和确定最差边界及计算简单等优点。试验结果表明, 采用 ISS 分析得到的控制器的系统是稳定的, 实际系统运行情况验证: 在控制器控制下, 跟随系统按照确定的跟随模型跟随主动系统, 在主动系统的有界外界输入情况下, 跟随性能有了显著的提高。

**关键词:** 伺服控制; 跟随控制系统; 稳定性; 输入-状态稳定性

**中图分类号:** TP275 **文献标识码:** A

## Input-to-State Stability on Following Servo Control System

LIU Qi-hui, XIANG Xue-fu

(Dept. of Armament Products, No. 58 Research Institute of China Ordnance Industries, Mianyang 621000, China)

**Abstract:** Aiming at the similarity of following control system and “guider” intelligent team formation, analyze the stability of following servo control system by (Input-to-State Stability ISS) and validate the performance of system controller. The following control system consists of active system and following system, and its following system follows the active system according to certain following model. The ISS relates the active system input to internal state of the following control system and characterizes the way this input affects the stable performance. The ISS that is used to analyze the stability of following control system, compared to other stability analysis that does not require attenuation of propagating error, and provides the bounds of stable critical case. The experimentation result demonstrates that the system is stable based ISS controller. The running situation shows that under the controlling of controller, following system follows the active system according to certain following model and the following performance is improved based on the external boundary input of active system.

**Keywords:** Servo control; Following control system; Stability; Input-to-state stability

### 0 引言

在许多工程系统中, 多个伺服控制子系统在关联约束下实时同步运行是比较常见的<sup>[1-2]</sup>。这些关联约束包括物理机械结构、控制规则和控制信号等。跟随控制系统的主要目的是控制规则关联约束, 不考虑和分析机械结果的关联约束。输入-状态稳定性 (Input-to-State Stability, ISS) 分析常被用来分析“领导者”多智能体队形的稳定性<sup>[3-4]</sup>, 由于跟随控制系统和“领导者”智能体队形控制系统比较相似, 故借鉴 ISS 分析跟随控制系统中主动系统的外界控制输入与跟随控制系统内部状态的关联, 通过 ISS 分析给出系统理论基础上的特性, 对确定控制算法中某些参数提供严格的数学界定。

### 1 输入—状态稳定性

#### 1.1 基本定理

为了表示在跟随控制系统中主动系统和跟随系统的关系, 可采用多智能体系统常用的图论表示方法, 一个系统的关系可简单地描述为<sup>[3-4]</sup>:

$$F = (V, E, D) \quad (1)$$

其中, 有限集合  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  含有  $n$  个元素, 表示  $n$  个子系统;  $E = V \times V$ , 表示跟随控制系统中子系统之间存在的关系, 比如  $(v_i, v_j) \in E$ , 表示子系统  $v_i$  在跟随控制系统中以  $v_j$  为参考以确定跟随模型运动, 即  $v_i$  跟随  $v_j$  运动; 有限集合  $D = \{d_{ij}\} (d_{ij} \in R^n)$  表示边, 子系统  $v_i$  与  $v_j$  的状态关系和关联约束。跟随控制系统确定跟随模型  $d_{ij} = \text{常数}$ , 定理跟随系统  $v_i$  的理想状态, 以  $v_j$  为主动系统, 有:

$$x_i^r = \sum_j S_{ji}(x_j - x_i - d_{ij}) \quad (2)$$

收稿日期: 2009-08-03; 修回日期: 2009-09-23

作者简介: 刘启辉 (1969-), 男, 重庆人, 1989年毕业于西南科技大学, 从事光电跟踪与伺服控制研究。

其中,  $S$  是一个具有  $n$  阶秩的特殊映射矩阵,  $x_i$  表示跟随系统  $v_i$  的实际状态。由此, 可得到状态误差  $\tilde{x}_i = x_i^r - x_i$ , 如果跟随控制系统中有多个跟随系统, 则跟随控制系统的误差用  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  集合表示。

### 1.2 输入-状态稳定性

跟随控制系统的外界输入对系统内部稳定性的影响在文献[3]和[4]中分别被称为输入-状态稳定性和领导者队形稳定性, 两者基本原理是一致的, 都是分析系统控制输入对系统内部稳定性的影响。

**定理 1** 如果一个系统是输入-状态稳定的, 则必存在一个  $K$  类函数  $\gamma$  和一个  $KL$  类函数  $\beta$ <sup>[5]</sup>, 使得任意的初始跟随控制系统状态误差  $\tilde{x}(0)$  和有界控制输入  $u_i(t)$ , 跟随控制系统的状态误差满足:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \beta(\|\tilde{x}(0), t\|) + \sum_i \gamma(\sup_{[0,t]} \|u_i\|) \quad (3)$$

其中,  $\beta(r, t)$  是瞬态增益和  $\gamma_i(r)$  是渐进增益。

如果跟随控制系统是输入-状态稳定的, 按照定理 1 的含义, 可以得到状态误差满足下式:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| \leq \sum_i \gamma(\sup \|u_i\|) \quad (4)$$

如果跟随控制系统是渐进输入-状态稳定的, 则增益  $\gamma(\sup \|u_i\|)$  是系统误差的极限边界。文献[4]给出了量化稳定性标量  $P_{ISS}$ , 其值属于  $[0, 1]$ 。

**定理 2** 一个系统是输入-状态稳定的, 则稳定性度量表示为  $P_{ISS} = \frac{1}{1 + \sum_i \gamma_i(1)}$ 。

由定理 2 知, 如系统的外界控制输入在单位球范围内, 可估计出稳定系统状态误差的范围, 且范围是由位移定。影响稳定性的量化值与系统状态误差成反比, 范围增大或减小, 量化值减小到 0 值或增大到 1。跟随控制系统只涉及一个主动系统和一个跟随系统, 不考虑多个和多级跟随控制系统, 也不需引入输入-状态稳定性多级传播的分析方法。

## 2 系统描述

### 2.1 系统动力学

跟随控制系统是由 2 个子系统主动系统  $x_a$  和跟随系统  $x_f$  构成。主动系统接受外界控制输入, 跟随系统按照事先确定的跟随模型跟随主动系统运动, 使得跟随误差最小并且在有限时间内收敛到容忍范围内。主动系统和跟随系统状态动力学如下:

$$\dot{X} = F(\Gamma) \quad (5)$$

其中,  $\dot{X} = (\dot{x}_a, \dot{x}_f)^T$ ,  $F(\Gamma) = (f_a(\Gamma_1), f_f(\Gamma_2))^T$ ,  $f_a(\cdot)$  和  $f_f(\cdot)$  都是由 3 个光滑函数之和组成<sup>[5]</sup>, 参数如下:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_f \\ u_a(t) \end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_f \\ u_a(t) \end{bmatrix}$$

跟随系统反馈控制律  $w_f(t) = w_f(x_a(t), x_f(t))$  表明系统没有外界控制输入, 只和自身状态和主动系统的状态相关。跟随系统与主动系统保持跟随模型  $d_{fa}$ 。跟随系统的理想状态  $x^d_f = x^d_a - d_{fa}$ , 所以跟随系统的状态误差定理为:

$$\tilde{x}_f = x^d_f - x_f \quad (6)$$

等式两边对时间求导, 由于  $d_{fa}$  是约定的确定的跟随模型, 跟随系统状态误差动力学方程为:

$$\dot{\tilde{x}}_f = f_f(x_f, x_a, 0) - f_a(x_a, x_f, u_a) \quad (7)$$

主动系统的控制律为  $u_a(t)$ , 它取决于外界控制输入, 本身系统状态和跟随系统状态; 如果  $\Gamma_1$  中的  $z = 1$  表示主动系统受到跟随系统的内联关系影响; 如果  $z = 0$  表示主动系统不受跟随系统影响。这两种情况可以用图 1 简单描述。图 1(a)用单向箭头的边连接主动系统 a 和跟随系统 f, 描述跟随系统只受主动系统影响( $z = 0$ )。图 1(b)用双向箭头边连接主动系统 a 和跟随系统 f, 描述跟随系统受到主动系统的约束规则为  $d_{fa}$ 、主动系统受到跟随系统的约束规则为  $r_{fa}$  ( $z = 1$ )。在此只考虑  $z = 0$  的情况。



图 1 主动系统与跟随系统关系

主动系统控制律为:  $w_a(t) = w_a(x_a, x_f, u_a(t))$ , 其中,  $u_a(t)$  是外部控制输入, 并满足  $u_a(0) = 0$  和  $\dot{u}_a(0) = 0$  条件。

关于系统外界控制输入  $u_a(t)$  对跟随控制系统的稳定性影响, 由定理 1 给出状态误差变化趋势反映。如果系统稳定, 由定理 2 可知,  $u_a(t)$  在单位球内。需要设计的控制律  $w_a(t)$  具有约束  $u_a(t)$  的作用, 使任意有界  $u_a(t)$  不影响跟随控制系统的稳定性。

### 2.2 实际跟随控制系统描述

主动系统和跟随系统由直流力矩电机驱动负载, 2 个负载同轴连接但可自由转动, 忽略机械系

统的耦合。要求跟随系统电机驱动负载转动的角度与主动系统电机驱动负载转动角度满足如下关系：

$$\theta_f^d = \theta_a^d / 2 \tag{8}$$

其中， $\theta_f^d$  为跟随系统期望转动角度， $\theta_a^d$  为主动系统期望转动角度，跟随控制系统的外界控制输入。跟随控制系统的闭环控制模型如图 2。

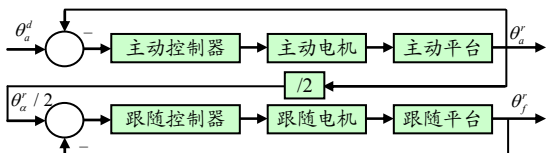


图 2 系统控制模型

该模型和图 1(a) 相对应，跟随系统按照预定的确定跟随模型去跟随主动系统。主动系统的外界控制输入是随机的，是跟随控制系统无法观测的。跟随系统只能感知主动系统电机驱动负载实际输出，并以此的 1/2 值作为控制输入，形成闭环控制。把主动系统和跟随系统的控制误差统一到跟随控制系统的误差表示。控制器的设计要使跟随控制系统的误差趋于 0，并且受到干扰后，在有限时间内收敛到容忍范围内。其数学表达为：

$$\phi_{af}^d = \theta_a^d / 2 - \theta_f^d \tag{9}$$

$$\phi_{af}^r = \theta_a^r / 2 - \theta_f^r \tag{10}$$

$$\tilde{\phi}_{af} = (\phi_{af}^d - \phi_{af}^r) \overset{\Delta}{=} 0 \tag{11}$$

其中， $\theta_a^d$  为主动系统的跟踪控制输入角度，即主动系统的理想转动角度； $\theta_f^d$  为跟随系统的理想转动角度； $\phi_{af}^d$  为理想相对角度关系； $\theta_a^r$  主动系统实际转动角度； $\theta_f^r$  跟随系统实际转动角度； $\phi_{af}^r$  为实际相对角度关系； $\tilde{\phi}_{af}$  为实际与理想相对角度关系之间的误差。

### 3 ISS 分析应用

$\phi_{af}^d$  为系统确定跟随模型参数，以  $\tilde{\phi}_{af}$  为跟随控制系统的控制输出， $\tilde{\phi}_{af} = 0$  是跟随控制系统的控制期望；跟随控制系统的动力学方程表示为：

$$\dot{\tilde{\phi}}_{af} = -\dot{\phi}_{af}^r = \dot{\theta}_f^r - \frac{1}{2}\dot{\theta}_a^r \tag{12}$$

令  $\omega_a = \alpha_1 \dot{\theta}_a^r$ ， $\omega_f = \alpha_2 \dot{\theta}_f^r$ ，函数  $\alpha_1(t) > 0$ ， $\alpha_2(t) > 0$ 。输出函数  $y = \phi_{af}^r$ ，由输入输出反馈线性化得到：

$$\dot{y} = \dot{\phi}_{af}^r = \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}\omega_a + (-1)\alpha_2^{-1}\omega_f \tag{13}$$

$$\omega_f = (-\alpha_2^{-1})^{-1} \left[ \dot{y} - \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}\omega_a \right] \tag{14}$$

$$\omega_a = \alpha_1 \dot{\theta}_a^r \tag{15}$$

选择  $\dot{y} = k = \alpha(\phi_{af}^d - \phi_{af}^r)$ ， $\alpha > 0$ 。定理 Lyapunov 候选函数  $V_{af} = (1/2)\|\tilde{\phi}_{af}\|^2$ ，求导变量替换后可得：

$$\dot{V}_{af} \leq -\|\tilde{\phi}_{af}\|^2 + \|\tilde{\phi}_{af}\| \frac{1}{2}\alpha_1^{-1}\alpha_2\omega_a$$

存在  $\zeta \in R$ ，满足  $\zeta \in (0,1)$  使得  $\dot{V}_{af} \leq -(1-\zeta)\|\tilde{\phi}_{af}\|^2$ 。存在系统状态遵从下列不等式，使其满足上述论述：

$$\|\tilde{\phi}_{af}\| \leq \beta(\|\tilde{\phi}_{af}(0)\|, t) + \gamma(\sup\|\omega_a\|) \tag{16}$$

其中：

$$\beta(r, t) = r \frac{\alpha_1}{\alpha_2} e^{-\alpha_1(1-\zeta)t} \tag{17}$$

$$\gamma(r) = r |\phi_{af}^d e^{-\alpha_2 \alpha_2}| \tag{18}$$

由以上式子可确定系统的输入—状态稳定性特征，说明控制器只要满足式 (12) 的关系，系统是输入—状态稳定的，控制器能使系统稳定。在设计控制器时通过求解，找到满足式 (13)~式 (15) 的  $\alpha_1(t)$  和  $\alpha_2(t)$ ，从而获得控制算法。

理想系统跟随曲线如图 3，在实际系统中，采用 0.02 s 的采样周期对整个跟随系统的数据进行采集，实际跟随曲线如图 4，跟随误差曲线 error 以及误差对比如图 5，error1 曲线是另一种 PI 控制算法得到的跟随误差曲线。实际系统表明：当系统的控制输入有界变化时，整个跟随控制系统稳定，因为当主动系统的外界控制输入恒定后，跟随系统的控制输出趋于恒定，跟随误差在很短时间内收敛并且恒定，相对另一种 PI 算法动态误差和稳态误差都有提高；但是实时性仍然比较差。说明通过 ISS 分析求解式 (13)~式 (15) 获得控制算法中的  $\alpha_1(t)$  和  $\alpha_2(t)$ ，稳定了实际系统并提高了系统的跟随性能。

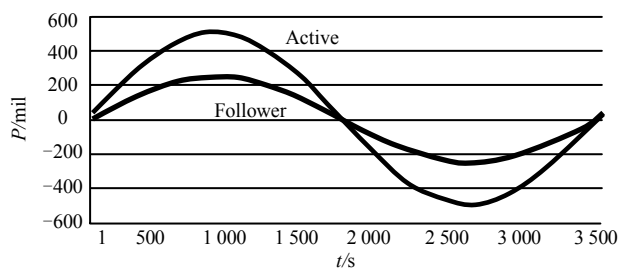


图 3 理想跟随曲线

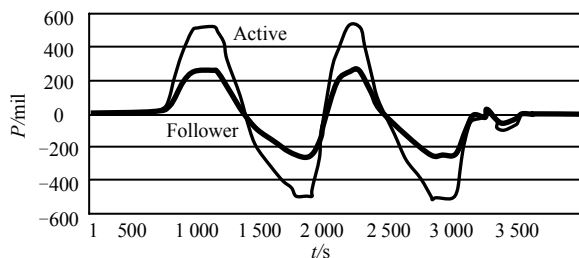
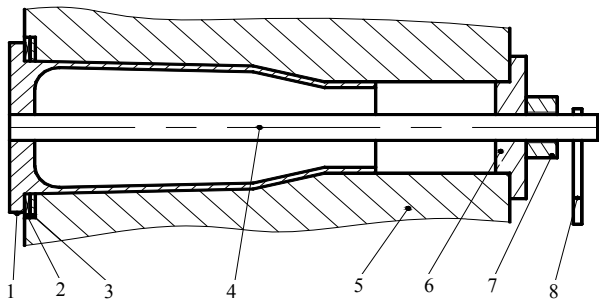


图 4 实际跟随曲线 (下转第 84 页)

筒子，抽筒子与药筒底缘接触处适当减薄，以备在该处贴应变片。抽筒子减薄量，以将应变片贴在该部位和药筒到位关闭闭体不受影响为宜（如不影响贴应变片，也可不作减薄处理），测试装置如图 1。



1: 底缘; 2: 应变片; 3: 抽筒子; 4: 钢棒; 5: 炮管;  
6: 固定盘; 7: 螺母; 8: 手柄

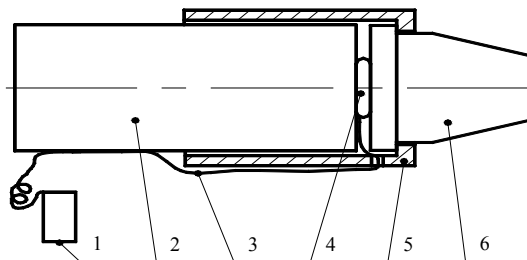
图 1 陆炮测试装置

抽壳力测试装置安装好后，用人工后座的办法将炮尾拉到需要的后座位置，然后让炮尾自动复进到位（操作程序与火炮作推力试验一样），这时，根据应变片测得电流的大小，计算出抽壳力，该抽壳力就是火炮的实际抽壳力。对于不同的装药量，火炮后座位置有所不同，因而可测得各种装药条件下火炮的实际抽壳力。该方法可以用来检查火炮出厂前实际抽壳力的大小是否达到设计要求。

得到火炮实际抽壳力的大小后，当遇到卡壳时，再测出卡壳力的大小，将卡壳力的大小与火炮实际抽壳力的大小相比较，如卡壳力小于火炮抽壳力，则说明出现卡壳现象是火炮抽壳故障所致；反之，说明卡壳原因是因为药筒卡壳力过大所致。一旦出

现卡壳现象就会很容易分清责任，减少争执和不必要的重复试验，以减少时间，节约试验费用。

陆炮设计有专门测试抽壳力大小的抽壳机。而舰炮的炮尾结构复杂，连抽壳机在炮尾固定都不容易。故可采用下述方法测试卡壳力的大小：用一个φ40的圆钢棒，顶端装一活塞，中间装上压电晶体，将圆钢棒从炮口插入，用人工或机械动力通过钢棒撞击卡在火炮药室内的药筒内底部（必须能一次撞击就将药筒从火炮药室中捅出）。钢棒长度以减去火炮身管长度后，剩余长度以 6~8 人能同时握紧为准，该装置如图 2。



1: 测试仪; 2: 钢棒; 3: 导线; 4: 压电晶体; 5: 活塞套; 6: 活塞

图 2 舰炮测试装置

最后，根据撞击时压电晶体测得电流的大小来确定抽壳力的大小。

### 3 结论

在射击试验时一旦出现卡壳现象，该 2 种测试装置能很容易地分清是药筒原因还是火炮原因。该办法简单易行、操作可靠、数据准确，有重要的理论和实用价值。

\*\*\*\*\*

(上接第 82 页)

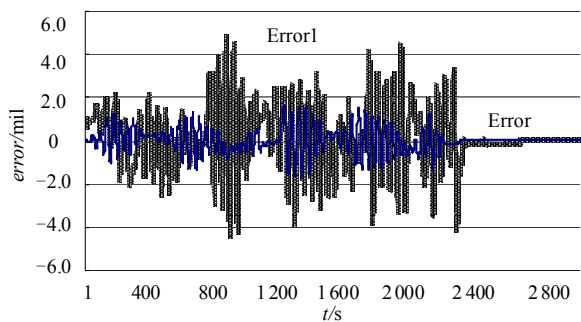


图 5 跟随误差

### 4 结束语

如果存在  $\beta(r,t)$  和  $\gamma_l(r)$  函数，跟随控制系统的状态误差满足式 (3)，说明有界不确定控制输入在系统控制器的约束下，对跟随控制系统稳定性没有影响。试验结果证明，该方法简单、实用，可以把

主动系统和跟随系统的控制误差统一到跟随控制系统的误差内，避免复杂的分析计算，减少了不合适的假设对系统稳定分析的影响。

### 参考文献:

[1] 张新华, 李伟. 多伺服电机的同步控制[J]. 机床与液压, 2003(4): 90-91.  
 [2] 韩壮志, 王田苗, 张玉茹, 等. 基于 DSP 的多轴伺服控制器设计及其在灵巧手中的应用[J]. 高技术通讯, 2002(3): 70-74.  
 [3] Herbert G. Taner, George J. Pappas, Vijay Kumar. Input-to-state Stability on Formation Graphs[R]. Proceeding of the 41<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control, 2002: 2439-2444.  
 [4] Herbert G. Taner, George J. Pappas, Vijay Kumar. Leader-to-Formation Stability[J]. IEEE Trans. On Robotics and Automation, 2004, 20(3): 443-455.  
 [5] 何德峰, 季海波, 郑涛. 持续有界扰动下的非线性  $H_\infty$  鲁棒预测控制[J]. 自动化学报, 2008, 34(2): 215-219.