doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2010.03.003

基于马尔科夫更新过程的侦察系统可靠性分析

沈吉锋[1]，张永志[1]，宋朝河[2]，陈芬[1]
（1. 蚌埠坦克学院 计算机教研室，安徽 蚌埠 233050；2. 解放军炮兵学院 研究生45队，安徽 合肥 230031）

摘要：针对系统部件寿命或修理时间不服从，或不完全服从指数分布的非马尔科夫型冷贮备可修系统的可用性，基于马尔科夫更新过程理论建立可用性分析模型，并依据时域迭代法分析系统的瞬时可用度。通过对雷达系统的可用性分析，检验了模型的可行性，为非马尔可夫型系统的可用性分析提供了有效的方法。

关键词：马尔科夫更新过程；可用度；时域迭代法；极大似然估计
中图分类号：N945.17 **文献标识码**：A

Based on Markov Renewal Process Credibility Analysis of Reconnaissance System

SHEN Ji-feng[1], ZHANG Yong-zhi[1], SONG Chao-he[2], CHEN Fen[1]
(1. Staff Room of Computer, Bengbu Tank Institute, Bengbu 233050, China;
2. No. 45 Brigade of Postgraduate, Artillery Academy of PLA, Hefei 230031, China)

Abstract: Aiming at the credibility of cold save system which the life function or the time of maintaining disobedience or incomplete obedience exponential distribution non-Markov, building usability analytic model based on Markov renewal process and analyze system availability according to time domain iteration method. Through usability analysis of the radar system, it examined the model possibility and provided the valid methods for availability analysis to non-Markov system.

Keywords: Markov renewal process; Usability; Time domain iteration method; Maximum likelihood estimator

0 引言

由于新装备不断配备到部队侦察系统，对于新装备的可靠性分析已成为当前重要课题。故针对非马尔科夫型的冷储备可修系统的可靠性，依据马尔科夫更新过程理论，建立可靠性分析模型，对系统的稳态可用性进行分析，并采用2种不同的方法对系统的瞬时可用性进行分析，以验证模型的可行性。

1 马尔科夫更新过程的概念

设随机变量 Z_n 取值在 $E=\{0,1,\cdots,K\}$ 中，而随机变量 T_n 取值在$[0,\infty)$中，且有 $0=T_0\leqslant T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots\leqslant T_n$, $n=0,1,\cdots$，如果对所有 $j\in E$, $t\geq 0$，有 $P\{Z_{n+1}=j, T_{n+1}-T_n\leq t\,|Z_0,Z_1,\cdots,Z_n,T_0,T_1,\cdots,T_n\}=P\{Z_{n+1}=j, T_{n+1}-T_n\leq t\,|Z_n\}$，则随机过程$(Z,T)=\{Zn, Tn, n=0,1,\cdots\}$称为状态空间 E 上的马尔科夫更新过程；又如果对所有 $i, j\in E, t\geq 0$，$P\{Z_{n+1}=j, T_{n+1}-T_n\leq t\,|Z_n=i\}=Q_{ij}(t)$与 n 无关，则称(Z,T)是时齐的，称$\{Q_{ij}(t), i, j\in E,\}$为半马尔科夫核。当状态空间只有一个状态 $E=\{0\}$时，则$\{T_{n+1}-T_n, n=0,1,\cdots\}$是独立同分布随机变量序列，故$\{T_n, n=0,1,\cdots\}$是部分和过程，即马尔科夫更新过程成为更新过程。根据分析，经过化简可求得马尔科夫更新方程组为：

$$h_i(t)=g_i(t)+\sum_{j\in E}\int_0^t h_j(t-u)dQ_{ij}(u),\ i\in E$$

即：

$$h_i(t)=g_i(t)+\sum_{j\in E}Q_{ij}(t)*h_j(t-u),\ i\in E$$

其中，$h_i(t)$、$g_i(t)$ 都是定义在$[0,\infty)$上的非负、在任何有限区间上的有界函数。

2 侦察系统可靠性分析模型

在装备的可靠性分析中，最重要的指标是系统首次故障前的时间分布、系统可靠度以及系统的平均故障次数。故基于马尔可夫更新过程理论，建立可靠性分析模型，对这3个可靠性指标进行分析。

1) 模型假设

假设2个同型部件构成的贮备系统中，每个部件的工作寿命 X 服从韦布尔分布 $W(\alpha,\lambda)$，密度函数 $f_X(t)=\lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}$, $t\geq 0$; $\lambda,\alpha>0$ 和分布函数 $F_X(t)=1-e^{-(\lambda t)^\alpha}$, $t\geq 0$，其中 $\alpha/\lambda=\int_0^\infty t\mathrm{d}F_X(t)$；部件故障后的修理时间 Y 服从参数为 μ 指数分布；2个部件的工作寿命和修理时间

收稿日期：2009-10-04；修回日期：2009-11-02
基金项目：炮兵侦察配系效能分析（陆装科订部2007第307号）
作者简介：沈吉锋（1981-），男，安徽人，从事网络数据库研究。

都相互独立；转换开关是可靠的，状态转移是瞬时的；部件修复如新。部件的工作状态有：

0：一个部件开始工作，另一个部件储备；

1：一个部件开始工作，另一个部件开始修理；

2：一个部件发生故障，另一个部件在修理。

进一步假设 $X(t)$表示时刻 t 系统所处的状态；$T_n(T_0=0)$表示系统第 n 次发生状态转移的时刻。令 $Z_n=X(T_n+0)$，表示系统在第 n 次状态转移的时刻所进入的状态，因此，$\{Z_n, T_n, n=0,1,\cdots\}$构成马尔科夫更新过程。根据系统的假设以及马尔科夫更新过程理论，得到系统状态之间的转移关系如图 1。

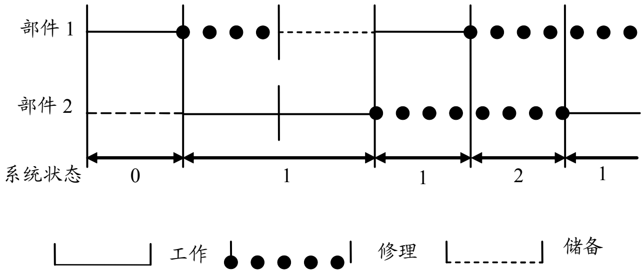

图 1 系统状态转移关系图

根据半马尔科夫核的表达式，可知：

$$\begin{cases} Q_{01}(t)=P\{X\le t\}=1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}} \\ Q_{11}(t)=P\{X\le t, Y<X\} \\ \qquad =\int_0^t [F_X(t)-F_X(u)]f_Y(u)\mathrm{d}u \\ Q_{12}(t)=P\{X\le t, X<Y\} \\ \qquad =\int_0^t f_X(u)-[F_X(t)-F_X(u)]f_Y(u)\mathrm{d}u \\ Q_{21}(t)=1-e^{-\mu t} \\ Q_{ij}=0, \qquad 其他\ i,j\in E \end{cases} \tag{1}$$

2) 侦察系统的稳态可用度

设 $A_i(t)=P\{T_t=1|Z_0=i\}, i=0,1,2$ 则 $A_0(t)=P\{T_t=1|Z_0=0\}=P\{T_t=1, T_1>t\,|Z_0=0\}+P\{T_t=1, T_1\le t\,|Z_0=0\}$。根据系统假设，结合状态转移方程可知：

$P\{T1>t\,|Z_0=0\}=1-Q_{01}(t)$

$P\{T_1\le t\,|Z_0=0\}=\int_0^t A_1(t-u)\mathrm{d}Q_{01}(t)$

因此，得到马尔可夫更新方程组为：

$$\begin{cases} A_0(t)=Q_{01}(t)*A_1(t)+[1-Q_{01}(t)] \\ A_1(t)=Q_{11}(t)*A_1(t)+Q_{12}(t)*A_2(t) \\ \qquad +[1-Q_{11}(t)-Q_{12}(t)] \\ A_2(t)=Q_{21}(t)*A_1(t) \end{cases} \tag{2}$$

结合式 (1)，对式 (2) 作 LS 变换，求解可用度更新方程组，可得：

$$\begin{cases} \hat{A}_0(s)=\dfrac{[1-s\hat{F}(s)][1+\hat{F}(s+\mu)]}{s[1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)]} \\ \hat{A}_1(s)=\dfrac{[1-s\hat{F}(s)]}{s[1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)]} \\ \hat{A}_2(s)=\dfrac{\mu[1-s\hat{F}(s)]}{s(s+\mu)[1-\hat{F}(s)+\hat{F}(s+\mu)]} \end{cases} \tag{3}$$

因此有：$\lim\limits_{s\to 0} s\hat{A}_0(s)=\lim\limits_{s\to 0} s\hat{A}_1(s)=\lim\limits_{s\to 0} s\hat{A}_2(s)$。

根据 *MRP* 过程极限定理可知，系统稳态可用度为：

$$A=\lim_{s\to 0} s\hat{A}_i(s)=\frac{2\alpha(\lambda+\mu)^{\alpha}\mu^2}{2\alpha(\lambda+\mu)^{\alpha}\mu^2+\lambda^{\alpha+1}} \tag{4}$$

3) 侦察系统的瞬态可用度

对式 (3) 作拉普拉斯反变换，可得系统的瞬态可用度。但是冷储备系统的工作时间通常比系统进入稳态可用度的时间短，稳态可用度很难描述系统瞬态可用度的动态变化；而且当寿命时间和维修时间函数较为复杂时，无论是拉普拉斯变换还是反变换都会遇到计算困难。故采用时域迭代法求解更新方程组，以获取冷储备系统的瞬态可用度。为讨论方便，改写更新方程组为：

$$\begin{cases} A_0(t)=\int_0^t A_1(t-u)\mathrm{d}Q_{01}(u)+[1-F(t)] \\ A_1(t)=\int_0^t A_1(t-u)\mathrm{d}Q_{11}(u) \\ \qquad +\int_0^t A_2(t-u)\mathrm{d}Q_{12}(u)+[1-F(t)] \\ A_2(t)=\int_0^t A_1(t-u)\mathrm{d}Q_{21}(u) \end{cases} \tag{5}$$

令 $q_0(u)=\dfrac{\mathrm{d}Q_{01}(u)}{\mathrm{d}u}$；$q_1(u)=\dfrac{\mathrm{d}Q_{11}(u)}{\mathrm{d}u}$；$q_2(u)=\dfrac{\mathrm{d}Q_{12}(u)}{\mathrm{d}u}$；$q_3(u)=\dfrac{\mathrm{d}Q_{21}(u)}{\mathrm{d}u}$，并且设 $0\le A_i(t)<M$, $t\in[0, +\infty)$，$i=0,1,2$，根据幂级数解的形式，则方程的第 n 次迭代值为：

$$\begin{cases} A_0^{(n)}(t)=\int_0^t A_1^{(n-1)}(t-u)q_0(u)\mathrm{d}u+[1-F_X(t)] \\ A_1^{(n)}(t)=\int_0^t A_1^{(n-1)}(t-u)q_1(u)\mathrm{d}u \\ \qquad +\int_0^t A_2^{(n-1)}(t-u)q_2(u)\mathrm{d}u+[1-F_X(t)] \\ A_2^{(n)}(t)=\int_0^t A_1^{(n-1)}(t-u)q_3(u)\mathrm{d}u \end{cases} \tag{6}$$

其中首次迭代的初值选为

$$\begin{cases} A_1^{(0)}(t)=1-F(t) \\ A_2^{(0)}(t)=0 \end{cases} \tag{7}$$

通过编程计算上述迭代方程，可计算出系统可

用度的瞬时值。

4) 可靠性分析模型的参数估计

假定系统寿命时间为随机变量，且服从 $W(\beta,\mu)$，其分布函数为：

$$F(y) = 1 - \exp\{-(\lambda y)^{\mu}\}$$

其可靠度函数为：$R(y) = \exp\{-(\beta y)^{\mu}\}$。

其中，$y > 0,\ \beta > 0,\ \mu > 0$。

假定得到系统的寿命时间试验的 n 个完全样本数据为：X_1，X_2，…，X_n。这 n 个数据可看作来自总体 $W(\beta,\mu)$ 的容量为 n 的样本，则 $\log X_i, i=1,2,\cdots,n$ 是独立同分布的随机变量，其共同分布为极值分布：

$$G(x) = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{x-\bar{x}}{\theta}\right)\right) \tag{8}$$

其中，$\bar{x} = \log(\alpha), \theta = \lambda$。

记 $\gamma_k = E[(\log X_i)^k],\ k = 1,2,\cdots$，根据极值分布 $G(x)$ 可知：

$$\begin{cases} \gamma_1 = \bar{x} - r\theta \\ \gamma_2 = \dfrac{\pi^2\theta^2}{6} + \gamma_1^2 \end{cases} \tag{9}$$

其中，r=0.577 215 为欧拉常数。

由上述分析可得 (β,μ) 的矩估计分别为：

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \exp\left\{-\dfrac{P}{n} - \dfrac{\sqrt{6}\ r(nQ-P^2)^{\frac{1}{2}}}{n\pi}\right\} \\ \hat{\alpha} = \dfrac{n\pi}{\sqrt{6}}\left[nQ - P^2\right]^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{10}$$

其中，$P = \sum_{k=1}^{n} \log X_k$；$Q = \sum_{k=1}^{n} (\log X_k)^2$。

3　雷达系统的可靠性分析

雷达是现代科学技术的高科技系统的集中体现，其应用也越来越广泛。近年来，雷达在新理论、新技术和新器件上都进入了新的发展阶段。对其进行可靠性分析，对雷达系统的发展及应用都有非常重要的意义。故以脉冲雷达为例，对其进行可靠性分析。根据雷达系统的维修时间，对系统进行参数估计，雷达系统的寿命时间分布统计结果如表 1。

表 1　系统寿命时间统计表（单位：h）

统计次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
寿命时间	269	107	37	126	161	53	156	124	127	65
维修时间	5.8	1.7	2.2	14.3	2.6	3.1	4.4	9.7	1.0	5.5
统计次数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
寿命时间	212	137	190	106	272	512	155	216	395	117
维修时间	4.7	22.2	2.0	30.1	2.9	17.1	13.8	2.3	4.6	25.4

根据表 1 并结合式(10)，对寿命时间和维修时间分布函数的参数估计可得：$\hat{\lambda} = 0.11$；$\hat{\alpha} = 4.79$；$\hat{\mu} = 0.10$。由式(3)可知，系统稳态可用度 $A = 0.9507$。对式(3)作拉普拉斯反变换，得到雷达系统的瞬时可用度，如图 2（虚线）。

根据表 1，对系统部件的寿命时间和维修时间参数的估计值，可知其分布为：

$$F_X(t) = 1 - e^{-(4.79\ t)^{9.86}},\quad t \ge 0$$

$$F_Y(t) = 1 - e^{-0.10\ t},\quad t \ge 0$$

运用 Matlab 计算机程序，对可用度的马尔可夫更新方程的迭代进行算法计算，结合式(6)得到冷储备系统的瞬时可用度变化曲线，如图 2（实线）。

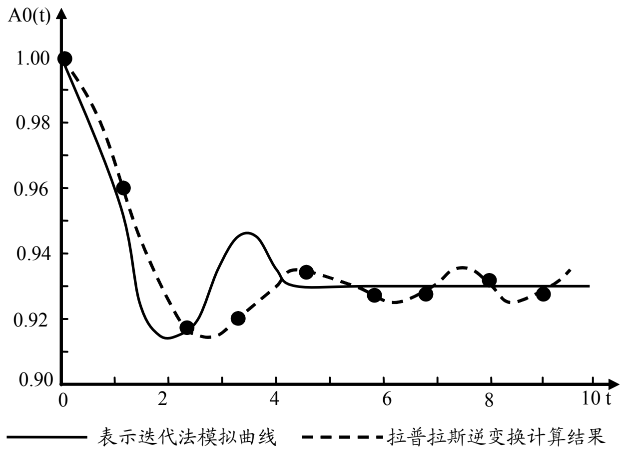

图 2　侦察系统瞬时可用度曲线

4　结束语

该模型为寿命时间服从韦布尔分布的冷贮备系统提供了可靠性分析方法。满足增失效率序的寿命函数的非马尔可夫系统是否均可运用该模型进行可靠性分析，还要在后续研究工作中进行探索。

参考文献：

[1] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：科学出版社，2006: 266-271.

[2] 徐光辉，袁学明，李泉林. Markov 更新过程的首达时间及其应用[J]. 中国科学(A 辑)，2000, 30(5): 415-425.

[3] 叶慈南. 完全样本情形下威布尔分布参数的估计[J]. 应用概率统计，2003, 19(3): 257-266.

[4] 王少萍，陶建峰，崔明山，等. 马尔可夫更新方程的迭代算法研究[J]. 北京航空航天大学学报，2004, 30(12): 1168-1172.

[5] 张明友，汪学刚. 雷达系统[M]. 北京：电子工业出版社，2006: 113-128.

[6] 王栋，滕红智，高清伦. 模糊可靠性在某型装甲车辆可靠性分析中的应用[J]. 四川兵工学报，2009(10): 32-34.