doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2010.06.007

随机矩阵对策及其在舰艇作战方案中的应用

王天虹，宋业新
（海军工程大学 理学院，湖北 武汉 430033）

摘要：根据随机矩阵对策的最优策略和对策值的定义，讨论对策结果（最优策略和对策值）关于随机矩阵中各随机变量分布函数的稳定性，给出了具体的稳定性分析方法。并以舰艇作战方案为例，建立了随机双矩阵对策模型，研究结果对于双方资源分配，提高作战效能具有一定的军事应用价值。

关键词：随机矩阵对策；分布函数；稳定性分析；舰艇作战方案
中图分类号：O225; O241 **文献标识码**：A

Stochastic Matrix Game and Application in Naval Ships Operational Projects

WANG Tian-hong, SONG Ye-xin
(College of Science, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: According to the definition of the optimal strategy and game value of stochastic matrix game, discuss the strategy result (including optimal strategy and strategy value) of random varies distribution function stability in random matrix, the stability analysis method is proposed. Taking naval ships operational projects as example, establish the random dual-matrix strategy model, research result has the military application value for resource distribution and improving fighting effectiveness.

Keywords: Stochastic matrix game; Distribution function; Stability analysis; Naval ships operational projects

0 引言

对策理论[1-3]是研究具有对抗性或竞争性冲突问题的基本理论和方法。通常假定对策双方的策略集、每个局势的支付值都是确定不变的，实际上许多对策问题的支付值难以确定，从而对策模型的求解产生了困难。故讨论策略集确定、各支付值为随机变量的随机矩阵对策[4]的求解及其稳定性分析方法，并以舰艇作战方案为例，建立一个随机双矩阵对策模型。

1 随机矩阵对策结果的稳定性

定义 1 设局中人 1、2 的策略集分别为 S_1、S_2，$A_\xi=(\xi_{ij})_{m\times n}$ 是局中人 1 的随机支付矩阵，其中 $\xi_{ij}(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ 为随机变量，若 $F_{ij}(x)$ 为 ξ_{ij} 的分布函数，且满足：$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\mathrm{d}F_{ij}(x)<+\infty$，记 $a_{ij}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F_{ij}(x), A=(a_{ij})_{m\times n}, F=(F_{ij})_{m\times n}$，称矩阵对策 $\Gamma=\{S_1,S_2;A\}$ 的最优策略和对策值为随机矩阵对策 $\overline{\Gamma}=\{S_1,S_2;A_\xi;F\}$ 的最优策略和对策值。

定义 1 本质上是根据 ξ_{ij} 的数学期望 $E(\xi_{ij})$ 确定 ξ_{ij} 之间的一种排序。也可以利用其他的排序方式，例如利用方向凸函数确定方向凸序，或通过比较概率的大小排序。确定某种排序方式后，就可以按照普通矩阵对策的有关方法计算随机矩阵对策在此排序下的对策结果。随机矩阵对策的最优策略（纯策略）和对策值与普通矩阵对策的最优策略和对策值有类似的性质。

在某些具体问题中，随机矩阵对策的各随机变量 ξ_{ij} 的理论分布函数 $F_{ij}(x)$ 往往难以确定，实际常常借助经验分布函数 $F_{ij}^{(k)}(x)$ 代替理论分布函数 $F_{ij}(x)$，计算出 $a_{ij}^{(k)}$，然后以 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{m\times n}$ 为(局中人 1 的)支付矩阵求出最优策略和对策值，从而需要讨论矩阵对策 $\Gamma_k=\{S_1,S_2;A^{(k)}\}$ 的对策结果的稳定性。

定义 2 设 X、Y 和 V 是以 A 为支付矩阵得到的局中人 1，局中人 2 的最优策略和最优值；X_k,Y_k 和 V_k 是以 $A^{(k)}$ 为支付矩阵得到的最优策略和最优值。若满足：$\lim_{k\to\infty}X_k=X,\lim_{k\to\infty}Y_k=Y,\lim_{k\to\infty}V_k=V$，称随机矩阵对策 $\overline{\Gamma}=\{S_1,S_2;A_\xi;F\}$ 关于 ξ_{ij} 的分布函数 $F_{ij}(x)$ 具有稳定性。

由文献[1]知，若 X_1,Y_1 分别是互为对偶的线性规划问题(1)、(2)的最优解，则 $X_1{*}=VX_1,Y_1{*}=VY_1$ 分别为矩阵对策 $\Gamma=\{S_1,S_2;A\}$ 中局中人 1、局中人 2 的最优策略，两式中的 V 为对策值。

收稿日期：2010-01-25；修回日期：2010-03-17
基金项目：海军工程大学科研基金资助项目(HGDJJ08002)
作者简介：王天虹（1974-），女，湖北人，硕士，武汉海军工程大学理学院应用数学系讲师，从事运筹与优化研究。

(1) $\begin{cases} \min J_m' X = \dfrac{1}{V} \\ X'A \ge J_n' \\ X \ge 0_m \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \max J_n' Y = \dfrac{1}{V} \\ AY \le J_m \\ Y \ge 0_n \end{cases}$

$(1)_k$ $\begin{cases} \min J_m' X = \dfrac{1}{V_k} \\ X'A^{(k)} \ge J_n' \\ X \ge 0_m \end{cases}$　　$(2)_k$ $\begin{cases} \max J_n' Y = \dfrac{1}{V_k} \\ A^{(k)} Y \le J_m \\ Y \ge 0_n \end{cases}$

同理，若 X_k、Y_k 是线性规划问题 $(1)_k$、$(2)_k$ 的最优解，则 $X_k{*} = V_k X_k, Y_k{*} = V_k Y_k$ 分别为矩阵对策 $\Gamma_k = \{S_1, S_2; A^{(k)}\}$ 中局中人 1、2 的最优策略，V_k 是对策值。

定义 3[5] 设 C、C_k 分别是问题 (1)、$(1)_k$ 的全部基解构成的集合，若 $X \in C$ 对应的基为 $P_{i1}, \cdots, P_{ir}, X_k \in C_k$ 对应的基为 $P_{i1}^{(k)}, \cdots, P_{ir}^{(k)}$，则称 X 与 X_k 是同位基解。

引理 1[5] 设 $X_1 \in C, X_k \in C_k$ 是问题 (1) 与 $(1)_k$ 的同位基解，A 的秩等于 m，则当 $\|A - A^{(k)}\| < \varepsilon$ 时，有 $\|X_1 - X_k\| \le c\varepsilon$，$c$ 是与 k、ε 无关的正常数。

定理 1 设随机矩阵对策 $\overline{\Gamma} = \{S_1, S_2; A_\xi; F\}$ 关于分布函数 $F_{ij}(x)$ 所确定的矩阵对策 $\Gamma = \{S_1, S_2; A\}$ 只有唯一的最优解 (X^*, Y^*)，且 A 的秩为 m，有：

(ⅰ)若问题(1)的最优解为 X_1，问题 $(1)_k$ 的同位基解为 X_k，则 X_k 是问题 $(1)_k$ 的最优解；

(ⅱ)若问题(2)的最优解为 Y_1，问题 $(2)_k$ 的同位基解为 Y_k，则 Y_k 是问题 $(2)_k$ 的最优解。

证明：(ⅰ)设 X_1 是问题(1)的最优解，其对应的基阵为 B，因为 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$，故当 k 充分大时，线性规划问题 $(1)_k$ 的系数矩阵 $A^{(k)}$ 中与 B 位置相同的子矩阵 $B^{(k)}$ 也为基阵，记对应于基阵 $B^{(k)}$ 的基解为 X_k，由定义 3 可知，X_1 与 X_k 是同位基解。

下证 X_k 为 $(1)_k$ 的最优解。

因为问题(1)只有唯一的最优解 X_1，X 为问题(1)的任意基解，则有 $J_m' X_1 < J_m' X$。

记 $\delta = \min\limits_{X \ne X_1} \left| J_m' X - J_m' X_1 \right|$，因为问题(1)只有有限个基解，故 $\delta > 0$，且 $\sum\limits_{j=1}^{m} x_j - \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^1 \ge \delta$。

由引理 1，令 $\varepsilon > 0$，ε 充分小，有充分大的 k，使 $\left| a_{ij} - a_{ij}^{(k)} \right| < \varepsilon$，对同位基解 X_1，X_k 有：

$$\|X_1 - X_k\| < c_1 \varepsilon < \frac{\delta}{2m} \tag{3}$$

对(1)的任意基解 X 和 $(1)_k$ 的同位基解 $\overline{X}_k$ 有：

$$\left\|X - \overline{X}_k\right\| < \bar{c}\varepsilon < \frac{\delta}{2m} \tag{4}$$

式 (3)、式 (4) 中 c_1、$\bar{c}$ 是与 k、ε 无关的正常数。

再由式 (3)、式 (4) 可得：

$$x_j^k < x_j^1 + \frac{\delta}{2m}，\quad \overline{x_j^k} < x_j - \frac{\delta}{2m}$$

则有 $J_m' \overline{X_k} - J_m' X_k = \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{x_j^k} - \sum\limits_{j=1}^{m} x_j^k \ge$

$$\sum_{j=1}^{m} (x_j - \frac{\delta}{2m}) - \sum_{j=1}^{m} (x_j^1 + \frac{\delta}{2m}) = \sum_{j=1}^{m} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_j^1 - \delta \ge 0$$

可知 X_k 为线性规划问题 $(1)_k$ 的最优解。

(ⅱ) 类似可证。

定理 2 设随机矩阵对策 $\overline{\Gamma} = \{S_1, S_2; A_\xi; F\}$ 满足定理 1 的条件，则随机矩阵对策 $\overline{\Gamma} = \{S_1, S_2; A_\xi; F\}$ 关于分布函数 $F_{ij}(x)$ 具有稳定性。

证明：由文献[5]有，对任意的 $\varepsilon > 0$，当 k 充分大，有：

$$|V - V_k| < c_2 \varepsilon \tag{5}$$

又因 $X^* = VX_1, X_k{*} = V_k X_k$，故由引理 1 可得：

$$\|X^* - X_k{*}\| < c_3 \varepsilon，\quad \|Y^* - Y_k{*}\| < c_4 \varepsilon \tag{6}$$

综上所述，随机矩阵对策 $\overline{\Gamma} = \{S_1, S_2; A_\xi; F\}$ 关于分布函数 $F_{ij}(x)$ 具有稳定性。

2　随机双矩阵对策

定义 4 设 S_1、S_2 分别是局中人 1、局中人 2 的策略集，$A_\xi = (\xi_{ij})_{m\times n}$、$B_\eta = (\eta_{ij})_{m\times n}$ 分别是局中人 1、局中人 2 的随机支付矩阵，$\xi_{ij}, \eta_{ij}\ (i = 1,2,\cdots,m,\ j = 1,2,\cdots,n)$ 为随机变量，$F_{ij}(x)$ 为 ξ_{ij} 的分布函数，$G_{ij}(y)$ 为 η_{ij} 的分布函数，$F = (F_{ij}(x))_{m\times n}$，$G = (G_{ij}(y))_{m\times n}$，且满足下式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, x \,| \mathrm{d}F_{ij}(x) < +\infty，\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\, x \,| \mathrm{d}G_{ij}(y) < +\infty$$

记 $a_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F_{ij}(x), A = (a_{ij})_{m\times n}$，$b_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \mathrm{d}G_{ij}(x), B = (b_{ij})_{m\times n}$，称双矩阵对策 $\Gamma = \{S_1, S_2; A, B\}$ 的最优策略和对策值是随机双矩阵对策 $\Gamma^* = \{S_1, S_2; A_\xi, B_\eta; F, G\}$ 的最优策略和对策值。

随机双矩阵对策 $(S_1, S_2; A_\xi, B_\eta; F, G)$ 与随机矩阵

对策 $\overline{\Gamma}=\{S_1,S_2;A_\xi;F\}$ 有相似的性质，不再赘述。

同理，由定义 4 知道求随机双矩阵对策 $\Gamma^*=\{S_1,S_2;A_\xi,B_\eta;F,G\}$ 的最优策略和对策值也可以转化为求 F、G 所确定的 $\Gamma=\{S_1,S_2;A,B\}$ 的最优策略和对策值。

若 $\Gamma=\{S_1,S_2;A,B\}$ 在纯策略下的平衡点不存在，也可以转化为二次规划问题的求解[1,3]：

$$\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i y_j-u-v$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\le u, i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_i\le v, j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1, x_i\ge 0\\ \sum_{j=1}^{n}y_j=1, y_j\ge 0\end{cases}$$

于是，有以下结论：若 x^*,y^*,u^*,v^* 为此二次规划问题的最优解当且仅当 (x^*,y^*) 为双矩阵对策 $\Gamma=\{S_1,S_2;A,B\}$ 的 Nash 平衡点，$x^*Ay^{*T}=u^*$，$x^*By^{*T}=v^*$。从而可以计算出随机双矩阵对策 $\Gamma^*=\{S_1,S_2;A_\xi,B_\eta;F,G\}$ 的最优策略和对策值。

3 随机双矩阵对策应用举例

下面给出一个应用随机双矩阵对策讨论作战双方博弈情况的例子。

例 假设在一次争夺岛屿的海战中，红、蓝两军各有指挥官统帅相应数量的军舰，他们在为争夺某海域的几个岛屿而部署必要的兵力。假设有甲、乙 2 个岛屿，红军有 4 艘驱逐舰，蓝军有 3 艘驱逐舰，假设双方军舰战斗力相当，兵力的分派在战斗中起着重要作用。设 x 表示用于争夺甲岛屿的军舰数，y 为用于争夺已岛屿的军舰数，则{x，y}便可表示一种兵力分配策略，红方策略集 S_1={{4,0},{0,4},{3,1},{1,3},{2,2}}，蓝方策略集 S_2={{3,0},{0,3},{2,1},{1,2}}。

红方第 1 种方案对蓝方第 1 种方案时，红方赢得 ξ_{11} 为 $\lambda=1/5$ 的指数分布，蓝方赢得 η_{11} 为 $\lambda=-1/7$ 的指数分布；红方第 1 种方案对蓝方第 2 种方案时，红方和蓝方没有交战，双方各占一个岛屿，记双方赢得 ξ_{12}、η_{12} 数学期望均为 0；红方第 1 种方案对蓝方第 3 种方案时，红方赢得 ξ_{13} 为 $\lambda=1/4$ 的指数分布，蓝方赢得 η_{13} 为区间[−2，2]上的均匀分布；红方第 1 种方案对蓝方第 4 种方案时，红方赢得 ξ_{14} 为 $\lambda=1/3$ 的指数分布，蓝方赢得 η_{14} 为 $\lambda=1$ 的指数分布。

类似可得双方的随机支付矩阵 A_ξ、B_η 为：

$$\begin{bmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}&\xi_{13}&\xi_{14}\\ \xi_{21}&\xi_{22}&\xi_{23}&\xi_{24}\\ \xi_{31}&\xi_{32}&\xi_{33}&\xi_{34}\\ \xi_{41}&\xi_{42}&\xi_{43}&\xi_{44}\\ \xi_{51}&\xi_{52}&\xi_{53}&\xi_{54}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\eta_{11}&\eta_{12}&\eta_{13}&\eta_{14}\\ \eta_{21}&\eta_{22}&\eta_{23}&\eta_{24}\\ \eta_{31}&\eta_{32}&\eta_{33}&\eta_{34}\\ \eta_{41}&\eta_{42}&\eta_{43}&\eta_{44}\\ \eta_{51}&\eta_{52}&\eta_{53}&\eta_{54}\end{bmatrix}。$$

根据定义 4，计算出双方的支付矩阵 A、B 为：

$$\begin{bmatrix}5&0&4&3\\0&5&3&4\\2&1&4&2\\1&2&2&4\\0&0&3&3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-3&0&0&1\\0&-3&1&0\\0&3&-2&2\\3&0&2&-2\\4&4&0&0\end{bmatrix}。$$

该双矩阵对策 $\Gamma=\{S_1,S_2;A,B\}$ 在纯策略下的平衡点不存在，则此双矩阵对策可以转化为二次规划问题。

由 Matlab 软件[6]解得 $\Gamma=\{S_1,S_2;A,B\}$ 的 Nash 平衡点为 x^*=(0.500 0, 0.500 0, 0, 0 ,0), y^*=(0, 0, 0.500 0, 0.500 0), u=3.500 0, v=0.500 0。由此得出红蓝双方选择不同策略的概率分布。

4 结束语

讨论了随机矩阵对策结果(最优策略和对策值)关于各随机变量分布函数的稳定性，给出了具体的稳定性分析方法。并以舰艇作战方案为例，建立了一个随机双矩阵对策模型，对于双方资源分配，具有一定的指导意义。

参考文献：

[1] 张盛开. 对策论及其应用[M]. 武汉：华中工学院出版社, 1985.

[2] ICHIRO NISHIZAKI, MASATOSHI SAKAWA. Equilibrium solutions in multiobjective bimatrix games with fuzzy payoff and fuzzy goals[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000(111): 99−116.

[3] 谢政. 对策论[M]. 长沙：国防科技大学出版社, 2004.

[4] 张子方，等. 随机矩阵对策[J]. 西南工学院学报，2001, 16(4): 61−64.

[5] Lin Xu, Rui Qing, Zhao Ting-ting. Three Equilibrium Strategies for Two-Person Zero-Sum Game with Fuzzy Payoffs[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3613(1): 350−352.

[6] 王天虹，宋业新. 双矩阵对策在雷达电子战效能评估中的应用[C//]. 自动化理论、技术与应用. 武汉：武汉理工大学出版社, 2008: 328−331.

[7] 雷玉龙，李俊林. 基于态势的雷达组网作战效能评估建模[J]. 四川兵工学报, 2009(7): 38−41.