

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2010.06.024

## 小球平面系统的路径跟踪滑模控制

梁艳阳, 王姮, 张华, 熊莉英, 郭雪梅  
(西南科技大学 信息工程学院, 四川 绵阳 621010)

**摘要:** 首先分析小球平面运动控制系统的特点, 将路径跟踪控制分解为小球的位置控制问题和平面角度的控制问题。然后, 主要针对小球的位置控制问题, 基于小球运动系统的动力学模型和滑模控制的基本原理提出一种路径跟踪滑模控制算法, 并通过李亚普诺夫稳定性定理证明了闭环系统的渐进稳定性。该滑模控制算法消除了小球在平面上运动时时变不确定摩擦力对控制性能的不良影响, 提高路径跟踪控制的精度。最后, 通过仿真实验对所提出的滑模控制算法的控制性能进行了验证。

**关键词:** 小球平面系统; 路径跟踪; 滑模控制; 时变不确定性; 李亚普诺夫稳定性定理

**中图分类号:** TP273<sup>+</sup>.2 **文献标识码:** B

## Path Tracking Sliding Mode Control of Globule Plane System

LIANG Yan-yang, WANG Heng, ZHANG Hua, XIONG Li-ying, GUO Xue-mei  
(School of Information Engineering, Southwest University of Science & Technology, Mianyang 621010, China)

**Abstract:** At first, the property of the globule plane control system is analyzed, and the path tracking control problem is divided into sub problems of globule position control and plane angle control. Afterwards, a path tracking sliding mode control algorithm is proposed for the globule position control based on dynamic model of the globule motion system and basic principle of sliding mode control, asymptotical stability of the close-loop system is proved mathematically through Lyapunov stability theory as well. The proposed sliding mode control algorithm eliminates the effect of time-varying uncertain friction while the globule is rolling on the plane surface, and thus the path tracking precision is improved. Finally, control performance of the proposed sliding mode control algorithm is validated by simulation experiment.

**Keywords:** globule plane system; Path tracking; Sliding mode control; Time-varying uncertainty; Lyapunov stability theory

### 0 引言

小球平面系统是一个多变量、非线性控制系统, 是球杆系统的二维扩展。其控制对象是具有 2 个相互垂直的旋转轴的平板, 控制目标是让一个自由滚动的小球能平衡在板上特定的位置或者沿一定的轨迹滚动。平板绕两个转轴的旋转可分别由 2 个电机驱动, 通过传感装置得到小球在平板上的位置后反馈给控制系统, 控制系统采用一定的控制策略控制平板在 2 个转轴方向的转角, 实现对小球在板上定点和轨迹运动的控制<sup>[1]</sup>。国内外很多学者都对小球平面系统的控制方法进行了研究<sup>[1-7]</sup>。目前, 主要控制方法是将整个系统的控制问题分解为小球的位置控制和平面角度的控制, 即通过内外两个回路的方法实现对小球位置的精确控制<sup>[4-5,7]</sup>。由于采用 PID 控制等经典的控制方法对驱动电机的角位移进行控制, 一般都能获得良好的控制性能, 故小球平面系统的小球位置或路径跟踪的控制性能就主要取决于外回路控制器的性能。故主要针对小球平面系统的外回路控制问题, 基于系统动力学模型和滑模控制的基本原理提出新型的滑模控制策略,

实现对小球路径跟踪的高精度控制。

### 1 小球平面系统的动力学模型及性能分析

#### 1.1 小球平面系统的动力学模型

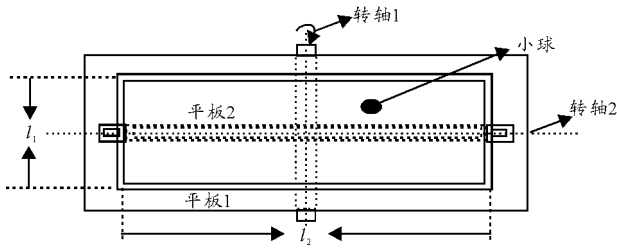
小球平面系统示意图如图 1。其中, 平板 2 安装在平板 1 上, 即转轴 2 固定于平板 1 的左右两端, 2 个平板可通过底层电机的驱动分别绕转轴 1 和 2 转动, 实现小球在平板 2 上的自由滚动。选择步进电机作为驱动电机, 通过齿轮传动直接作用于 2 个转轴, 并根据脉冲计数实时检测 2 个平板的角度。采用四线电阻触摸屏加钢球组成的压电式传感器代替昂贵的摄像机, 利用单片机内置的 ADC (模数转换器) 实现对触点实时位置的获取。其中四线电阻触摸屏由 2 个透明的阻性层叠加而成, 中间由很薄的透明绝缘支撑物隔开, 每个阻性层叠都涂有均匀电阻质, 在两端形成电极, 由导线引出, 屏的顶端在外力达到一定值时发生形变, 与底层产生电气接触, 此时可以用分压器原理来计算出短接位置, 换算成实际的坐标, 通过滤波技术可获取小球的亚毫米级精度位置信息。该设计简化了小球平面系统的机械结构, 降低了实验装置的成本, 更有利于减小

收稿日期: 2010-01-22; 修回日期: 2010-02-13

基金项目: 西南科技大学博士研究基金 (08zx011)

作者简介: 梁艳阳 (1980-), 男, 副教授, 从事非线性系统的自适应控制研究。

小球在  $x$ - $y$  方向上运动的耦合度和应用 2 个回路的控制思想实现系统的高精度控制。



$l_1$ : 平板 2 的宽度, 19.3 cm;  $l_2$ : 平板 2 的长度, 23.0 cm;  
 $M_1$ : 平板 1 的质量, 7.9 kg;  $m$ : 小球的质量, 0.22 kg.

图 1 板球系统的俯视图

根据所设计的小球平面物理系统的特点, 可采用两级控制方法实现小球在平板上沿任意给定参考曲线的运动控制, 控制系统原理如图 2。其中内回路控制器是二级控制器, 实现电机的高速高精度角位移控制, 外回路控制器作为一级控制器, 根据小球的当前状态 (包括小球当前位置、速度和加速度) 和给定的小球参考轨迹, 通过控制算法确定下一时刻的电机目标角位移。

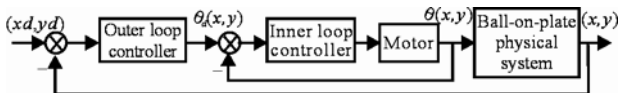
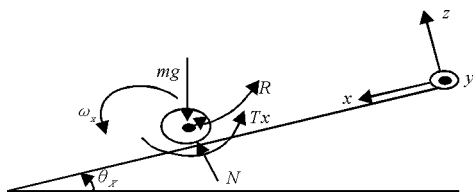


图 2 板球控制系统原理图

小球在平面上的自由滚动可以分解为  $x$ - $y$  两个方向上的运动, 并在 2 个方向上运动的耦合很小, 因此, 可以对小球在 2 个方向的运动分别进行独立控制。考虑如图 3 的小球在  $x$  方向上的运动情况, 假设小球为理想的球体, 根据牛顿力学的基本原理可以建立如下的动力学模型<sup>[4]</sup>:

$$mg \sin(\theta_x)R + T_x = mR\ddot{x} + J\dot{\omega}_x \quad (1)$$



$m$ : 小球质量;  $T_x$ : 未知的转矩;  $R$ : 小球的半径;  
 $\omega_x$ : 小球在  $x$  方向的角速度;  $g$ : 重力加速度。

图 3 小球在  $x$  轴方向的力学模型

根据线速度与角速度的关系, 有

$$R\dot{\omega}_x = \dot{x}$$

而转动惯量  $J = \frac{2}{5}mR^2$ , 故式 (1) 可改写为:

$$\ddot{x} = \frac{5}{7}g \sin(\theta_x) + \frac{5}{7mR}T_x \quad (2)$$

同理,  $y$  方向上的动力学模型为

$$\ddot{y} = \frac{5}{7}g \sin(\theta_y) + \frac{5}{7mR}T_y \quad (3)$$

由于  $x$  方向和  $y$  方向的控制器设计相互独立且方法一致, 故只讨论  $x$  方向的控制器设计。根据式 (2), 并令:  $\frac{5}{7}g = b$ ,  $\frac{5}{7mR}T_x = \Delta f(t)$ ,  $\sin(\theta_x) = u_x$ , 则式 (2) 可改写为

$$\ddot{x} = bu_x + \Delta f(t) \quad (4)$$

其中,  $\Delta f(t)$  是由平板和小球之间的摩擦力引起的未知时变不确定项, 其大小取决于平板和小球的材料、压力的大小和小球的运动速度等因素。

### 1.2 小球平面系统的动力学模型及性能分析

如果忽略不确定项  $\Delta f(t)$ , 根据式 (4) 可得到小球位移  $x$  和输入量  $u_x$  之间的传递函数模型为

$$\frac{X(s)}{U_x(s)} = \frac{b}{s^2} \quad (5)$$

令  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $X = [x_1, x_2]^T$ ,  $u = u_x$ , 系统输出为小球的位移  $x$ , 则根据式 (5) 可得到小球系统的状态空间方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0]X \quad (6)$$

对于连续时间系统, 有

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad Y = CX + Du \quad (7)$$

系统状态完全可控的充要条件是: 向量组  $A, AB, \dots, A^{n-1}B$  是线性无关, 即矩阵  $[A:AB:\dots:A^{n-1}B]$  的秩为  $n$ , 系统的输出可控的充要条件是:  $[CA:CAB:\dots:CA^{n-1}B:D]$  的秩等于输出  $Y$  的维数。应用该原理, 通过 matlab 可以计算得到: 系统的状态可控性矩阵的秩等于系统的状态变量维数 2, 系统的输出完全可控性矩阵的秩等于系统的输出变量的维数 1。因此, 可设计系统控制器, 使系统稳定。此外, 根据理想的状态空间方程 (6) 进行阶跃响应分析, 可得到系统发散的阶跃响应曲线。

## 2 小球平面系统的路径跟踪滑模控制器

### 2.1 路径跟踪滑模控制器设计

假设 1 式 (4) 中的未知时变不确定项  $\Delta f(t)$  的最大绝对值已知, 即存在常数  $0 < F < +\infty$ , 有  $|\Delta f(t)| < F$ , 且  $\Delta f(t)$  的一阶导数  $\dot{\Delta f}(t)$  存在且有界, 参数  $b$  为已知非零常数。

基于假设 1, 根据滑模控制的基本原理, 可设计小球在  $x$  方向的位置跟踪滑模控制器。令参考输入为  $x_d(t)$ , 则系统跟踪误差可表示为:

$$e(t) = x(t) - x_d(t) \quad (8)$$

设计滑模函数为:

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t) \quad (9)$$

根据滑模控制的基本原理, 只要被控系统 (4) 在滑模控制律的控制作用下, 系统状态  $x(t)$  在有限时间内能到达滑模面  $s(t) = 0$ , 则被控系统 (4) 就能实现对参考输入  $x_d(t)$  的渐进跟踪。

**定理 1** 当被控系统 (4) 满足假设 1 时, 存在常数  $\alpha > 0$ ,  $\beta > F$ , 在滑模控制律式 (10) 的控制作用下, 滑模面  $s(t) = 0$  是渐进收敛的, 从而被控系统 (4) 的跟踪误差 (8) 渐进稳定。

$$u_x(t) = b^{-1}(\ddot{x}_d(t) - \lambda \dot{e}(t) - \alpha s(t) - \beta \operatorname{sgn}(s(t))) \quad (10)$$

证明: 选择如下的候选 Lyapunov 函数

$$V(s, t) = \frac{1}{2}(s(t))^2 \quad (11)$$

根据被控系统 (4)、式 (9) 和控制律式 (10), 有:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \ddot{e}(t) + \lambda \dot{e}(t) \\ &= \ddot{x}(t) - \ddot{x}_d(t) + \lambda \dot{e}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= bu_x(t) - \ddot{x}_d(t) + \lambda \dot{e}(t) + \Delta f \\ &= -\alpha s(t) - \beta \operatorname{sgn}(s(t)) + \Delta f \end{aligned}$$

式 (11) 对时间求导, 并根据式 (12) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(s, t) &= \dot{s}(t)s(t) \\ &= (-\alpha s(t) - \beta \operatorname{sgn}(s(t)) + \Delta f)s(t) \\ &= -\alpha(s(t))^2 - \beta|s(t)| + \Delta f \cdot s(t) \\ &\leq -\alpha(s(t))^2 - (\beta - F)|s(t)| \leq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

根据式 (11) 和式 (13) 可知:  $s(t)$  是有界的, 进而根据式 (12) 及假设 1 可得:  $\dot{s}(t)$  也有界。当  $s(t) \neq 0$  时, 根据式 (13) 对  $\dot{V}(s, t)$  求时间导数, 可得:

$$\begin{aligned} \ddot{V}(s, t) &= -2\alpha s(t)\dot{s}(t) - \beta\dot{s}(t)\operatorname{sgn}(s(t)) + \\ &\quad \Delta \dot{f}(t)s(t) + \Delta f(t)\dot{s}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

根据假设 1 以及  $s(t)$  和  $\dot{s}(t)$  的有界性, 可知  $\ddot{V}(s, t)$  也是有界的, 从而  $\dot{V}(s, t)$  一致连续。又因为  $V(s, t)$  有界, 根据 Barbalat 引理<sup>[8]</sup> 可知  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(s, t) = 0$ 。从而根据式 (13) 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$ , 即  $s(t)$  是渐近收敛的。因此, 根据滑模控制的基本原理以及式 (9) 的滑模函数, 式 (8) 所示的系统跟踪误差  $e(t)$  是渐近稳定的。

## 2.2 仿真实验及结果分析

根据前述讨论, 所提出的路径跟踪滑模控制策略可在线实现如下:

1) 选择合适的控制器参数  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\lambda$ ;

2) 在每个采样控制周期  $k$  内, 处理:

(1) 读取系统状态  $x(k)$ , 获得参考输入  $x_d(k)$ , 计算它们的一阶后向差分  $\dot{x}(k)$  和  $\dot{x}_d(k)$ , 计算参考输入的  $x_d(k)$  的二阶后向差分  $\ddot{x}_d(k)$ ;

(2) 根据式 (8) 计算跟踪误差  $e(t)$ , 计算  $e(t)$  的一阶后向差分  $\dot{e}(k)$ , 根据式 (9) 计算滑模函数  $s(t)$  的值;

(3) 根据式 (10) 计算滑模控制律  $u_x(k)$ ;

(4)  $k=k+1$ ;

返回到第 (1) 步, 继续重复运行。

选取小球的摩擦力系数模型为<sup>[9]</sup>:

$$\mu_x = k_1 + k_2 \dot{x}(t) \quad (15)$$

则时变不确定项为:

$$\Delta f(t) = \frac{5}{7mR} T_x = \frac{5}{7mR} \mu_x mg \sin(\theta_x(t)) R = 7\mu_x \sin(\theta_x(t)) \quad (16)$$

根据式 (15) 和式 (16), 并令  $k_1=0.019 2$ ,  $k_2=-0.048$ , 可得时变不确定项的完整表达式为:

$$\Delta f(t) = 7 \times (0.019 2 - 0.048 \times \dot{x}(t)) \times \sin(\theta_x(t)) \quad (17)$$

让系统在平面上作半径为 0.05 m 的圆周运动, 并要求在 720 个控制周期之内完成一周的运动。可以选取圆周运动的  $x$ - $y$  方向的参考输入为:

$$x_d(k) = 0.05 \times \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi}{360}k\right) \right), \quad y_d(k) = 0.05 \times \sin\left(\frac{\pi}{360}k\right) \quad (18)$$

其中,  $k \in Z$  且  $0 \leq k \leq 720$ 。

根据系统的参考输入 (18)、时变不确定项 (17)、平面小球动力学方程 (4) 以及滑模控制策略 (10) 的在线实现策略, 选取控制器参数  $\alpha = 1$ 、 $\beta = 0.05$  和  $\lambda = 0.5$ , 在 matlab 中可实现小球平面系统的路径跟踪控制仿真实验。仿真实验的结果如图 4、图 5。其中, 图 4 中的左图表示小球分别在平面上  $x$ - $y$  两个方向上位移输出的情况, 图 4 中的右图表示在平面上运动轨迹的曲线。图 5 中的左图表示小球在 2 个方向上的位移误差, 图 5 中的右图表示小球的运动轨迹与参考输入轨迹的二次均方差。

(下转第 84 页)

经满足了发动机工作点的要求。

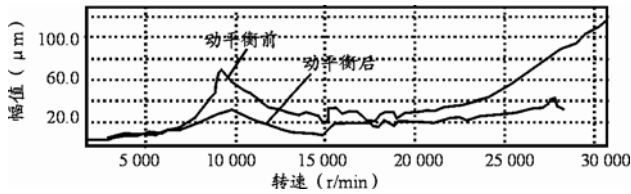


图 3 第一次二阶双面平衡后幅频响应曲线

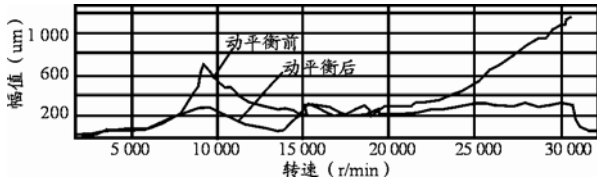


图 4 第二次二阶双面平衡后幅频响应曲线

### 4 结论

通过对某型发动机低压转子的高速动平衡实验研究, 结果表明:

1) 根据转子幅频特性, 采用多平面多转速影响

\*\*\*\*\*

(上接第 77 页)

当系统状态运行于滑模面附近时, 由于滑模控制律 (10) 中的切换项  $\beta \text{sgn}(s(t))$  频繁的切换, 从而造成了图 5 所示的系统位置误差在很小幅度 ( $\pm 2 \times 10^{-4}$  m) 内的振荡。从图 4、图 5 可以看出: 在存在由未建模摩擦力所引起的时变不确定性  $\Delta f(t)$  的情况下, 在形如式 (10) 的滑模控制律作用平面小球系统仍具有高精度的轨迹跟踪性能。

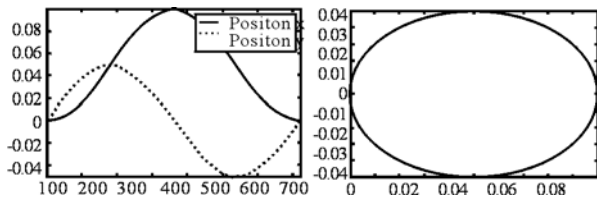


图 4 小球位移输出 x 和 y

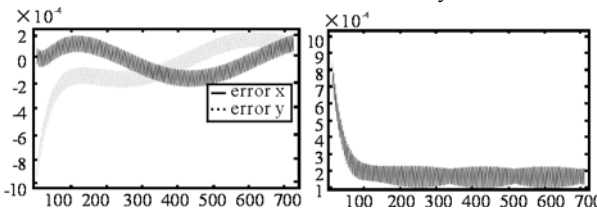


图 5 小球位移输出 x 和 y 的误差

### 3 结论

在充分研究平面小球系统动力学模型的基础上, 基于滑模控制的基本原理及李亚普诺夫稳定性定理构造了一个高性能的平面小球系统路径跟踪滑模控制器, 通过严格的理论推导证明了由所提出的滑模控制器和平面小球系统组成的路径跟踪控制系统的渐近稳定性, 给出了滑模控制器的在线实施策

系数法对该柔性转子一、二阶高速动平衡是可行的, 能取得良好的平衡效果; 2) 在对个别振动较大测点进行的平衡中, 可以根据振动较大通道的相位信息加试重, 实现在加试重这一步就较有效地降低振动量; 3) 该试验开展为该型发动机转子的高速动平衡总结了方法, 积累了经验, 提供了有力技术支持, 也为同类型转子高速动平衡提供了积极参考经验。

### 参考文献:

[1] 周仁睦. 转子动平衡—原理、方法和标准[M]. 化学工业出版社, 1992.  
 [2] 王四季, 廖明夫. 转子现场动平衡的技术研究[J]. 机械科学与技术, 2005, 24(12): 1510-1514.  
 [3] 叶能安, 余汝生, 等. 动平衡原理与动平衡机[M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1985.  
 [4] 钟一谔, 何衍宗. 转子动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.

略, 最后通过 matlab 对控制系统进行仿真实验, 并对实验结果进行分析, 验证了所提出的路径跟踪滑模控制器具有优越的控制性能。在此基础上, 还可以尝试构造对时变不确定项的在线辨识算法, 结合自适应控制的基本原理, 进一步研究平面小球系统的自适应滑模控制策略, 提高控制性能。

### 参考文献:

[1] 王赓, 孙政顺. 板球控制系统的 PD 型模糊控制算法研究[J]. 电气传动, 2004, 30(4): 23-25.  
 [2] J. Fuka, Z. Hanzalek. Rockwell automation technology in intensive training course[M]. Prague: Rockwell Automation, Allen Bradley, 1998: 1-15.  
 [3] S. Awtar, C. Bernard, N. Boklund, et al. Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system [J]. Mechatronics, 2002, 12(2): 217-228.  
 [4] J. H. Park, Y Jong Lee. Robust visual servoing for motion control of the ball on a plate [J]. Mechatronics, 2003, 13(7): 723-738.  
 [5] M. Moarref, M. Saadat, et al. Mechatronic design and position control of a novel ball and plate system[C]. Ajaccio: Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on, 2008: 1071-1076.  
 [6] 李军, 孙政顺. 模糊控制在板球系统中的仿真研究[J]. 电机与控制学报, 2001, 5(4): 270-274.  
 [7] H. Wang, Y. Tian, et al. Nonlinear control for output regulation of ball and plate system [C]. Kunming: Control Conference, 2008. CCC 2008. 27th Chinese, 2008: 382-387.  
 [8] J. J. E. Slotine, W. Li. Chapter 7 in: Applied nonlinear control [M]. New York: Prentice Hall, 1991: 122-124.  
 [9] 张雪菲. 板球系统摩擦特性分析与补偿控制算法的研究[D]. 吉林: 吉林大学通信工程学院, 2006: 55-62.