doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2010.07.006

基于兰彻斯特方程的反舰导弹突防模型

李红亮[1]，曹延杰[2]，宋贵宝[3]，刘铁[3]

（1. 海军航空工程学院 科研部，山东 烟台 264001；2. 海军航空工程学院 指挥系，山东 烟台 264001；
3. 海军航空工程学院 飞行器工程系，山东 烟台 264001）

摘要：在兰彻斯特作战动态方程的基本思想的基础上，建立反舰导弹突防舰空导弹的随机类型 Lanchester 方程。对已有确定型 Lanchester 方程进行改进，恰当地引入作战过程的随机因素，实现了反舰导弹对舰空导弹突防概率的求解。利用该数学模型不仅能较准确地评估反舰导弹的作战效能，也可为反舰兵力部署提供参考。

关键词：反舰导弹；舰空导弹；突防概率；兰彻斯特方程

中图分类号：N945.12　**文献标识码**：A

Penetration Model of Anti-Ship Missile Based on Lanchester Equation

Li Hongliang[1], Cao Yanjie[2], Song Guibao[3], Liu Tie[3]

(1. Dept. of Scientific Research, Naval Aeronautical & Astronautical University, Yantai 264001, China;
2. Dept. of Command, Naval Aeronautical & Astronautical University, Yantai 264001, China;
3. Dept. of Airborne Vehicle, Naval Aeronautical & Astronautical University, Yantai 264001, China)

Abstract: On the basis of basic ideas of Lanchester equation, the stochastic equation which described anti-ship missile penetrating ship-air missile was built. After the known deterministic Lanchester equation was improved, stochastic factors were correctly introduced in the course of combat, and penetration probability of anti-ship missile to ship-air missile was calculated. Using these mathematical models, the combat effectiveness of anti-ship missiles can be more factually evaluated, and a reference can be presented for deployment of anti-ship troops.

Keywords: anti-ship missile; ship-air missile; penetration probability; Lanchester equation

0 引言

反舰导弹武器系统在与敌舰载防空火力系统攻防过程中，无论是反舰导弹的引导，还是敌我双方的对抗，本身都包含大量不确定的随机因素，很难用统一的解析模型进行描述，这些大量出现的随机因素需要用一组无穷多个相互关联的随机变量来进行描述。为此，在对已有确定型 Lanchester 方程进行改进的基础上，恰当地引入作战过程的随机因素，建立了反舰导弹突防舰空导弹的随机类型的 Lanchester 方程，建立与防空火力系统的攻防对抗模型，为比较准确地描述反舰导弹武器系统的作战过程提供强有力的解析分析工具。

1 假设条件

在反舰导弹武器系统与舰载防空火力系统的攻防对抗过程中，舰艇在反舰导弹攻击下的损耗方程可近似看成是符合 Lanchesher 第二线性定律，即舰艇的损耗率不仅与攻击的导弹数有关，而且与单位面积上的舰艇防空火力单元数有关。现提出如下假设：

1) 反舰导弹由平台（飞机、舰艇）发射，以参数为 λ 的 Poisson 分布随机地到达，当反舰导弹之间的横距相差不大时，可认为从一个方向进入，反舰导弹无法对舰载防空火力单元实施精确攻击，只能对舰艇进行攻击。

2) 舰载防空火力系统的搜索雷达对来袭反舰导弹的发现时间服从参数为 ξ 的负指数分布，当舰载雷达发现目标后，只要目标进入舰载防空火力系统的发射区，便发射舰空导弹进行拦截，火力单元的一次射击时间也为负指数分布，射击时间间隔的数学期望为 τ。

3) 舰载防空火力单元数为 N，每个防空火力单元有 n（$n \geqslant 1$）个火力通道，一旦一个防空火力单元被反舰导弹击毁，就相当于防空火力系统失去 n 个火力通道。

2 模型的建立

2.1 确定型 Lanchester 方程

2.1.1 反舰导弹被发现的概率

在某一时刻，取 $b(t)$为舰载防空火力单元数，$r(t)$

收稿日期：2010-01-23；修回日期：2010-03-29

作者简介：李红亮（1978-），男，河北人，工程师，博士生，从事作战效能、军事系统工程、导弹装备管理与发展方面的研究。

为防空火力系统杀伤区上空来袭的反舰导弹数，则可得到舰载防空火力系统在 τ 时间内未发现任何来袭目标的概率为[1]：

$$p_0(\tau)=e^{-\xi\tau} \tag{1}$$

则在 τ 时间内 $r(t)$ 枚反舰导弹至少被发现一个的概率为：

$$p_1(\tau)=1-e^{-\xi\tau r(t)} \tag{2}$$

2.1.2　反舰导弹的变化率

由上面的分析可得，若防空导弹的单发杀伤概率为 P_k，则发现并击毁一枚导弹的概率为[2]：

$$p=P_k\cdot p_1(\tau)=P_k\cdot\left[1-e^{-\xi\tau r(t)}\right] \tag{3}$$

故在 τ 时间内，$b(t)$ 个防空火力单元杀伤来袭导弹的数学期望为：

$$E(r)=m(t)\cdot P_k\cdot\left[1-e^{-\xi\tau r(t)}\right] \tag{4}$$

式 (4) 中，$m(t)$ 为 τ 时间内舰载防空火力系统所能发射的最大舰空导弹数与防空火力杀伤区上空来袭反舰导弹数中的较小值，即：

$$m(t)=\min[r(t),n\cdot b(t)] \tag{5}$$

假设 t 时刻反舰导弹的突防概率为 $P_t(t)$，则反舰导弹飞越防空火力系统杀伤区的速率为 $\lambda\cdot P_t(t)$，因而在防空火力系统杀伤区上空的来袭导弹数量的变化率近似地表达为：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}&\approx\lambda-\frac{E(r)}{\tau}-\lambda\cdot P_t(t)\\&=\lambda-\lambda\cdot P_t(t)-\frac{m(t)\cdot P_k\cdot\left[1-e^{-\xi\tau r(t)}\right]}{\tau}\end{aligned} \tag{6}$$

2.1.3　防空系统火力单元的变化率

取 S_b 为防空火力单元分布的总面积，r_v 为一个火力单元的易毁面积半径，r_k 为一枚导弹的有效杀伤面积半径。于是对于由 $b(t)$ 个火力单元的系统，一枚反舰导弹对该系统火力单元的杀伤概率为：

$$P_r=\frac{\pi(r_k+r_v)^2}{S_b}\cdot b(t) \tag{7}$$

在 t 时刻，反舰导弹攻击防空火力系统的突防速率为 $\lambda\cdot P_t(t)$，则防空火力单元的变化率为：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t}&=-\lambda\cdot P_t(t)\cdot P_h\cdot P_r\\&=-\frac{\lambda\cdot\pi\cdot(r_k+r_v)^2\cdot P_h}{S_b}\cdot b(t)\cdot P_t(t)\end{aligned} \tag{8}$$

式 (8) 中，P_h 为单枚反舰导弹的命中概率。

式 (6) 和式 (8) 就是按照对抗双方力量变化推导出来的反舰导弹—舰载防空火力系统对抗的确定型 Lanchester 方程，该方程的解虽较易求出，但不能反映作战双方在任意时刻的随机状态变化情况。

2.2　随机型 Lanchester 方程

设 $R(t)$ 和 $B(t)$ 为反舰导弹和防空火力单元在 t 时刻数量的随机量，其联合概率分布函数可表示为：

$$P_{r,b}(t)=P\{R(t)=r,B(t)=b\} \tag{9}$$

为建立状态概率 Pr,b (t)动态方程，对 $t+\Delta t(\Delta t\to 0)$ 时刻出现状态为 (r,b) 事件的概率进行分析可得，出现状态 (r,b) 的事件为下述各独立事件之和为：

1) t 时刻处于状态 $(r+1,b)$，在 Δt 时间内有一枚反舰导弹被拦截或飞离火力杀伤区，该事件的概率为：$P_{r+1,b}(t)\left\{\frac{\min(r+1,n\cdot b)\cdot P_k\cdot\left[1-e^{-\xi\tau(r+1)}\right]}{\tau}+\lambda\cdot P_t(t)\right\}\Delta t$；

2) t 时刻处于状态 $(r-1,b)$，在 Δt 时间内有一枚反舰导弹飞入火力杀伤区，该事件的概率为：$P_{r-1,b}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t$ [3]；

3) t 时刻处于状态 $(r,b+1)$，在 Δt 时间内有一个火力单元被击毁，该事件的概率为：

$$P_{r,b+1}(t)\left[\frac{\lambda\cdot\pi\cdot(r_k+r_v)^2\cdot P_h\cdot(b+1)}{S_b}P_t(t)\right]\Delta t；$$

4) t 时刻处于状态 (r,b)，在 Δt 时间内没有反舰导弹及防空火力单元的数量变化，该事件的概率为：

$$P_{r,b}(t)\left\{1-\left[\begin{aligned}&\frac{\min(r,n\cdot b)\cdot P_k\cdot\left(1-e^{-\xi\tau r}\right)}{\tau}+\lambda\cdot P_t(t)\\&+\lambda+\frac{\lambda\cdot\pi\cdot(r_k+r_v)^2\cdot P_h\cdot b}{S_b}P_t(t)\end{aligned}\right]\Delta t\right\}。$$

由此可得到下述关系方程：

$$\begin{aligned}&P_{r,b}(t+\Delta t)=P_{r-1,b}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t+\\&P_{r,b+1}(t)\left[\frac{\lambda\cdot\pi\cdot(r_k+r_v)^2\cdot P_h\cdot(b+1)}{S_b}P_t(t)\right]\Delta t+\\&P_{r,b}(t)\left\{1-\left[\begin{aligned}&\frac{\min(r,n\cdot b)\cdot P_k\cdot\left(1-e^{-\xi\tau r}\right)}{\tau}+\lambda\cdot P_t(t)\\&+\lambda+\frac{\lambda\cdot\pi\cdot(r_k+r_v)^2\cdot P_h\cdot b}{S_b}P_t(t)\end{aligned}\right]\Delta t\right\}+\\&P_{r+1,b}(t)\left\{\frac{\min(r+1,n\cdot b)\cdot P_k\cdot\left[1-e^{-\xi\cdot\tau\cdot(r+1)}\right]}{\tau}+\lambda\cdot P_t(t)\right\}\Delta t\end{aligned} \tag{10}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，可得到状态概率的动态方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{r,b}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_{r,b}(t+\Delta t)-P_{r,b}(t)}{\Delta t}=\lambda\cdot P_{r-1,b}(t)-\left[\begin{array}{l}\lambda+\dfrac{\lambda\cdot\pi\cdot(r_k+r_v)^2\cdot P_h\cdot b}{S_b}P_t(t)+\lambda\cdot P_t(t)\\+\dfrac{\min(r,n\cdot b)\cdot P_k\cdot\left(1-e^{-\xi\tau r}\right)}{\tau}\end{array}\right]P_{r,b}(t)+\left\{\frac{\min(r+1,n\cdot b)\cdot P_k\cdot\left[1-e^{-\xi\cdot\tau\cdot(r+1)}\right]}{\tau}+\lambda\cdot P_t(t)\right\}P_{r+1,b}(t)+\left[\frac{\lambda\cdot\pi\cdot(r_k+r_v)^2\cdot P_h\cdot(b+1)}{S_b}P_t(t)\right]P_{r,b+1}(t) \tag{11}$$

式 (11) 即为反舰导弹–舰载防空火力系统对抗的随机类型 Lanchester 方程。通过求解该方程，可以获得各种对抗状态在任意时刻的概率 $P_{r,b}(t)$，并依此分析在任意时刻反舰导弹武器系统的作战效能。例如，在时刻 t 的局部突防概率可以写成：

$$P_t(t)=\sum_b\sum_r\left\{P_{r,b}(t)\cdot P_t[R(t)=r,B(t)=b]\right\} \tag{12}$$

式 (12) 中，$P_t[R(t)=r, B(t)=b]=P_t(r, b)$为 r 枚反舰导弹对抗 b 座防空火力单元的突防概率。

随机类型的 Lanchester 方程求解虽然有较大难度，但它考虑了反舰导弹武器系统与敌舰载防空火力系统攻防对抗过程中随机因素的影响，能更接近真实地反映对抗情况下反舰导弹的作战效能。

2.3　方程未知变量的确定

1) r、b 的取值范围

设反舰导弹的航路捷径为 D，舰空导弹系统有效杀伤区的远界为 $\rho_{\max}$、近界为 $\rho_{\min}$，则舰空导弹杀伤区的深度 S，可按下式计算[4]：

$$S=\sqrt{\rho_{\max}^2-D^2}-\sqrt{\rho_{\min}^2-D^2} \tag{13}$$

由此，可以得到杀伤区长度为 S 的区间内，所能容纳的来袭反舰导弹的最大数量 $r_{\max}$ 为：

$$r_s=\mathrm{int}\left[\frac{S}{v_j/\lambda}\right] \tag{14}$$

式 (14) 中，int[•]是对•取整，v_j 为反舰导弹的飞行速度。r 所能取的最大值应当不大于 r_s，另外，r 的最大值也不可能超过 0～t 时间段内发射的反舰导弹数 r_f，故 r 的最大值 $r_{\max}$ 可按下式计算：

$$r_{\max}=\min(r_s,r_f) \tag{15}$$

式 (15) 中，r_f 可由时间 t 和反舰导弹流密度 λ 确定，计算公式为：

$$r_f=1+\mathrm{int}(t\cdot\lambda) \tag{16}$$

故 r 取值范围为 1～$r_{\max}$，b 取值范围为 1～N。

2) 计算 $Pt(r, b)$

由于 $P_t(r, b)$为当前 t 时刻对抗条件下的反舰导弹的突防概率，故当 r 枚反舰导弹数小于或等于 $b\cdot n$ 个防空火力通道数时，所有反舰导弹均被拦截一次；而当 r 枚反舰导弹数大于 $b\cdot n$ 个防空火力通道数时，反舰导弹为饱和攻击，$b\cdot n$ 枚反舰导弹被拦截一次，$(r-b\cdot n)$ 枚反舰导弹未受到射击。即有下式：

$$P_t(r,b)=\begin{cases}1-P_k, & r\le b\cdot n;\\ 1-\dfrac{b\cdot n}{r}\cdot P_k, & r>b\cdot n\end{cases} \tag{17}$$

3　战斗过程分析

利用随机类型的 Lanchester 方程可以得到导弹武器系统在硬火力对抗条件下的突防概率，具体分析过程如下：

1) 战斗开始时间和初始状态。假定以第一枚反舰导弹进入防空武器系统杀伤区后遭遇拦截作为战斗的开始时间，则对抗系统的初始状态应为：$r(0)=1$，$b(0)=N$；同时，得到随机类型 Lanchester 方程的初始值为：

$$P_{r,b}(0)=\begin{cases}1 & r=1,b=N\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$$

2) 根据来袭导弹的数量和作战区域内的火力单元数，确定导弹与火力单元各种可能数量对抗情况的导弹突防概率。

3) 求解随机类型 Lanchester 方程得到联合概率分布函数 $P_{r,b}(t)$；并依此分析在任意时刻系统的作战效能和可能的战果。

4　结束语

将该模型编成计算机程序进行仿真，能获得任意时刻反舰导弹在敌硬火力对抗条件下的突防概率。根据仿真结果，不仅能准确地评估反舰导弹的作战效能，而且可以掌握在反舰战斗进行的某一时刻双方兵力的期望数量，可为首长定下决心提供准确可靠的定量分析报告。

参考文献：

[1] 雷鹏，曹泽阳. 基于兰彻斯特方程的防空对抗模型研究[J]. 战术导弹技术, 2007(1): 45-47.

[2] 许滕. 海军战斗效能评估[M]. 北京：海潮出版社, 2006.

[3] 韩松臣. 导弹武器系统效能分析的随机理论方法[M]. 北京：国防工业出版社, 2001.

[4] 滕克难. 舰空导弹反导作战拦截射击次数的建模方法[J]. 弹箭与制导学报, 2004, 24(3): 21-23.

[5] 蒋世军，沈剑峰，王炳. 反舰导弹海杂波建模与仿真[J]. 四川兵工学报, 2009(12): 117-118.