

doi: 10.7690/bgzd.2016.01.005

## 装备研制进度关键路径的 Monte Carlo 模拟与分析

孙尔蔓<sup>1</sup>, 许 诚<sup>2</sup>

(1. 海军航空工程学院研究生管理大队, 山东 烟台 264001;  
2. 海军航空工程学院飞行器工程系, 山东 烟台 264001)

**摘要:** 针对武器装备研制进度管理中无法对工期进行有效管理的问题, 提出一种将 Monte Carlo 运用到 PERT 网络中以确定关键路径的方法。在经典计划评审技术基础上, 给出网络图中工序的关键度、关键路径的定义, 通过 Monte Carlo 法模拟仿真计算得到各工序关键度的大小, 依据关键度大小确定网络的关键路径, 并成功地将该方法运用到某自主防空作战平台运载器分系统 PERT 网络图分析中。仿真结果表明: 该方法有效地解决了网络中工序持续时间随机性较大的问题, 为确定关键技术及分析关键技术对研制进度的影响提供了一种有效的方法。

**关键词:** 网络计划技术; 关键路径法; 蒙特卡罗; 研制进度

**中图分类号:** TJ02 **文献标志码:** A

## Monte Carlo Simulation and Analysis of Equipment Development Schedule's Critical Path

Sun Erman<sup>1</sup>, Xu Cheng<sup>2</sup>

(1. *Administrant Brigade of Postgraduate, Naval Aeronautical Engineering Academy, Yantai 264001, China;*  
2. *Department of Aircraft Engineering, Naval Aeronautical Engineering Academy, Yantai 264001, China*)

**Abstract:** According to the problem that duration can't be controlled effectively during the equipment development schedule, a method is proposed to confirm the critical path which applies Monte Carlo to the PERT network. Based on the classic PERT, this paper gives the definition of the activity criticality and critical path, studies how to use the Monte Carlo simulation to calculate the activity criticality so as to confirm the critical path, and apply this method to analyze the PERT network of an independent air defense combat platform's carrier subsystem successfully. The simulation results indicates that this method can effectively solve the problem that activity durations are random, besides, it offers an effective way to distinguish the critical technology and analyze the influences to the development schedule.

**Keywords:** network planning technology; critical path method; Monte Carlo; development schedule

### 0 引言

武器装备研制进度管理长久以来一直是装备管理的重要内容, 其基本元素为范围、资源和时间。在装备管理实践中, 范围和资源往往能较好地进行限定, 而时间即工期则由于各种不确定因素难以控制; 所以, 能否对时间进行有效管理直接影响着武器装备管理的成败。由于进度风险的存在势必影响装备管理顺利实施, 故对其做进一步研究意义重大。

网络计划技术<sup>[1]</sup>自 20 世纪 50 年代中期出现至今, 受到各个国家的重视, 已被应用于各个领域, 它是项目管理的一大突破, 尤其在进度管理方面表现突出, 可以高质量快速地达到项目管理要求。

网络计划技术包括关键路径法 (critical path method, CPM)、计划评审技术 (program evaluation and review technique, PERT)、图示评审技术 (graphical evaluation and review technique, GERT) 和风险评审技术 (venture evaluation and review technique, VERT)。CPM 由美国杜邦公司开创, 借

助于网络各工作的时间及相互关系在计划执行过程中寻找关键路径。PERT 由美国海军研制“北极星”导弹时使用, 在对网络的分析中, 主要是对工作进行评价和审查。其中 CPM 主要针对逻辑关系及工期均明确的确定型网络, 目的在于控制成本; 而 PERT 主要针对其逻辑关系确定但工期不确定的半确定型网络, 目的在于工期优化<sup>[2]</sup>。

在武器装备研制中, 由于新技术的使用和项目的复杂性等不确定情况, 项目的工期往往难于确定, 即项目各个工作的逻辑关系确定但持续时间不确定, 属于半确定型网络, 可以用 PERT 网络解决这一问题。基于此, 笔者将此法运用到某自主防空作战平台运载器分系统的研制进度管理中, 对其进行了算例演示。

### 1 基本理论

#### 1.1 网络计划技术

网络计划技术是对项目的进度计划进行合理规划、调整和控制以实现预定计划目标的计划管理技

收稿日期: 2015-09-05; 修回日期: 2015-10-16

作者简介: 孙尔蔓(1990—), 女, 江苏人, 硕士, 从事系统规划与管理决策研究。

术。其利用网络图来综合描述项目各工序的逻辑关系，通过网络图形对项目进行统筹规划，合理安排人力、物力、财力，以期用最少的时间和资源完成预期目标。

网络计划由网络图和网络参数<sup>[3]</sup>组成。网络图由节点和箭线组成，根据节点和箭线的不同表达含义将网络图分为单代号网络图和双代号网络图。单代号网络图用节点表示活动，箭线表示活动间的逻辑关系；双代号网络图用箭线表示活动，用节点区分活动的紧前紧后关系。网络参数是根据网络图以及各项活动持续时间来计算各时间参数。单代号网络图包括活动参数和线路参数，双代号网络计划包括节点参数、活动参数和线路参数。文中采用双代号网络图。在双代号网络计划分析中主要分析时间参数，网络计划时间参数包括最早开始时间  $ES$ 、最早完成时间  $EF$ 、最迟开始时间  $LS$ 、最迟完成时间  $LF$ 、总时差  $TF$  以及自由时差  $FF$ <sup>[4]</sup>，如图 1 所示。

$ES$	$LS$	$TF$
$EF$	$LF$	$FF$

图 1 时间参数

以  $i-j$  表示网络图中某一工序； $h-i$  表示工序  $i-j$  的紧前工作； $j-k$  表示工序  $i-j$  的紧后工作； $D_{i-j}$  表示工序持续时间。则时间参数计算如下：

$$ES_{i-j} = \max\{ES_{h-i} + D_{i-j}\}; \quad (1)$$

$$EF_{i-j} = ES_{i-j} + D_{i-j}; \quad (2)$$

$$LS_{i-j} = \min\{LS_{j-k} - D_{i-j}\}; \quad (3)$$

$$LF_{i-j} = LS_{i-j} + D_{i-j}; \quad (4)$$

$$TF_{i-j} = LS_{i-j} - ES_{i-j} = LF_{i-j} - EF_{i-j}; \quad (5)$$

$$FF_{i-j} = ES_{j-k} - EF_{i-j}。 \quad (6)$$

### 1.2 计划评审技术

计划评审技术于 20 世纪中叶由 Malcolm 等提出。它在北极星计划中的出色表现使该技术被广泛用于计划安排及管理实施活动中。长期的实践证明，其在缩短工期、减少成本、节约资源方面效果显著。据 PERT 的特性，PERT 多被用来分析不确定、不可预知因素多的新型项目、复杂项目。

经典 PERT 网络的理论基础是项目各工序的持续时间为随机变量，难以确定固定值，故可根据过去经验与历史数据对其进行估计。据此，对新兴项目或复杂项目进行工作持续时间估计时，往往采用

三时估计法。三时估计法<sup>[5]</sup>是对工序  $i-j$  的持续时间  $D_{i-j}$  做出最乐观时间  $a_{i-j}$ 、最可能时间  $m_{i-j}$  和最悲观时间  $b_{i-j}$  的估计。其中，持续时间  $D_{i-j}$  及方差  $\sigma^2$  的计算公式如下：

$$D_{i-j} = (a + 4m + b) / 6; \quad (7)$$

$$\sigma^2 = (b - a)^2 / 36。 \quad (8)$$

PERT 网络中，各时间参数的计算与网络计划技术中介绍的一致，它们由各项工序持续时间参数推算得知，均为随机变量。

项目总工期概率分布由 PERT 网络关键路径上所有工序的估计时间求和得到。据大数定律<sup>[6]</sup>，几乎所有的分布近似于正态分布，即工期  $T$  近似服从期望为  $\mu_T$ ，方差为  $\sigma_T^2$  的正态分布，故关键路径上各个工序的持续时间期望之和为项目工期的期望  $\mu_T$ ，方差之和为项目工期的方差  $\sigma_T^2$ ，计算公式如下：

$$\mu_T = \sum E[D_{i-j}]; \quad (9)$$

$$\sigma_T^2 = \sum \text{Var}[D_{i-j}]。 \quad (10)$$

在实际中，由于工期的不确定性，PERT 网络中往往会出现多条关键路径，经典方法忽略了这一问题，并未考虑到完工概率不符合实际的情形。

### 1.3 蒙特卡罗模拟法

Monte Carlo 模拟法于 1940 年由美国“曼哈顿计划”成员 S.M.乌拉姆和 J.冯·诺依曼提出，并随着计算机的迅速发展在各个领域得到广泛应用<sup>[7]</sup>。Monte Carlo 作为一种随机模拟方法，根据已有的模型确定活动持续时间的随机分布类型及相应的分布参数，如期望和方差，从而得到用于 Monte Carlo 模拟的概率模型。例如，将各种类型的输入变量如费用、工期视为服从某种概率分布的随机变量，每个随机变量通过随机数发生器产生符合条件的样本，随后依据网络给出的模型计算得到输出变量如总费用、总工期的样本。所有输入变量的随机变化将引起输出变量的变化，利用统计分析的方法即可获得输出变量的概率分布统计特征。

当 Monte Carlo 与网络计划结合时，针对 PERT 网络工期不确定性，用 Monte Carlo 仿真可以对不确定的变量进行定量处理。Monte Carlo 作为一种仿真技术，是一种数值计算的独特方式，其充分利用计算机强大的计算能力随机试验，往往选取经典概率分布形式构造概率模型。总体说来，用 Monte Carlo 对经典 PERT 网络进行分析时，只能得到与工期有关的如工期期望、方差、完工概率等信息，对

于关键路径分析作用不大。

### 2 蒙特卡罗模拟寻找关键路径

为了解决用 Monte Carlo 对经典 PERT 网络进行分析时，只能得到与工期有关信息，对于关键路径分析作用不大这一问题，利用关键度的概念来确定 PERT 网络的最终关键路径。最关键路径 (most critical path, MCP) 的概念最初于 20 世纪末由 Soroush 提出，并将其定义为：若网络中某条路径总工期大于其他所有路径的概率则其为最关键路径。笔者利用该定义给出了 PERT 网络局部关键活动及整体关键活动的概念，并通过比较各活动关键度的大小确定 PERT 网络关键路径<sup>[8-10]</sup>。

#### 2.1 基本定义

**定义 1 关键活动：**在 PERT 网络中，对于节点  $j(1 < j \leq n)$ ，有  $k(k \geq 2)$  项活动汇入节点  $j$ ，形成的活动集合所在各个路径记为  $r_j^b(b=1,2,\dots,k)$ ，记各个路径的持续时间为  $T_j^b$ ，节点  $j$  的计划完工时间为  $T_{jp}$ ，若存在路径  $r_j^c$  的持续时间  $T_j^c$  满足  $P(T_j^c \leq T_{jp}) < P(\max\{T_j^b\} \leq T_{jp})(b=2,3,\dots,k; b \neq c)$ ，则路径  $r_j^c$  即为局部网络的主导路径，对应的活动即为节点  $j$  的局部关键活动。当  $j=n$  时，该局部网络即为整体网络，此时的关键活动即为整个网络的关键活动。

**定义 2 活动关键度：**在 PERT 网络中，采用 Monte Carlo 法对各工序工期模拟  $N$  次，统计  $N$  次模拟工序  $i-j$  落在关键路径上的次数，记为  $M_{ij}$ ，则该工序关键度为  $A=M_{ij}/N$ 。当模拟次数足够大时，该式的含义为工序  $i-j$  落在关键路径上的概率。

#### 2.2 关键路径分析

由定义 2 可知：工序关键度  $A$  当模拟次数  $N$  足够大时即为工序在关键路径上的概率；所以，对于以  $j$  为完成节点的工序集合  $\{i-j\}$ ，定义关键度指标  $ACI_{ij}^c = \max\{ACI_{ij}\}$ ，满足该公式的即为工序  $\{i-j\}$  中的关键活动。具体寻找方式为：先确定网络图的终点节点  $n$  的关键活动，即比较所有以  $n$  为汇入节点的工序集合  $\{i-j\}$  的关键度  $A$ ，按照关键度指标  $ACI_{ij}^c = \max\{ACI_{ij}\}$  计算公式确定其关键活动，然后按相同的方式逆箭线方向沿该关键活动找到终结点前一节点  $j$  的关键活动，再逆箭线方向沿关键活动找到前一节点  $i$ ，依此往前逆推，找到关键活动的节点，将各个关键活动的节点顺序相连即得到了

PERT 网络的关键路径。

对于 PERT 网络图中各工序的持续时间采用三时估计法，邀请专家依据历史数据及以往经验进行估计，各工序的持续时间认为符合正态分布，具体利用 Monte Carlo 法模拟实现的步骤如下：

- 1) 设定模拟次数  $N$ ；
- 2) 据给定的各工序持续时间分析并确定其概率分布；
- 3) 进行一次模拟，产生随机数，即各个工序持续时间；
- 4) 据 3) 得到的时间计算各时间参数作为模型的输入变量，并依据输出值按 CPM 寻找关键路径法确定一次模拟的关键路径；
- 5) 执行一次判断，若模拟次数大于  $N$ ，执行 6)，否则执行 3)；
- 6) 从终止节点开始，逐次比较前序节点的关键度，依此向前逆推，直到起始节点；
- 7) 将 6) 中得出的各工序列出即为该网络图的关键路径。

具体网络计划流程图如图 2 所示。

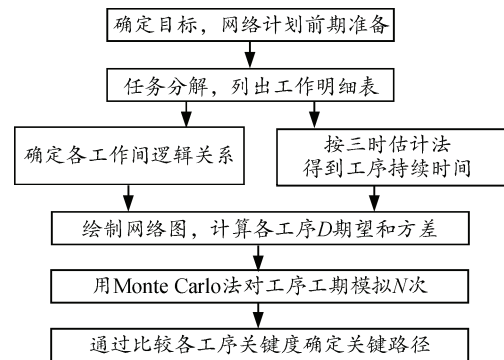


图 2 网络计划流程

### 3 算例

某自主防空作战平台是新生事物，正处于研制阶段。由于系统复杂，须克服的技术难题众多，如何有效地进行研制进度管理与控制，分析得出影响进度的关键活动、关键技术至关重要，将直接决定总体单位后期的研制进度规划方案及研究重点。

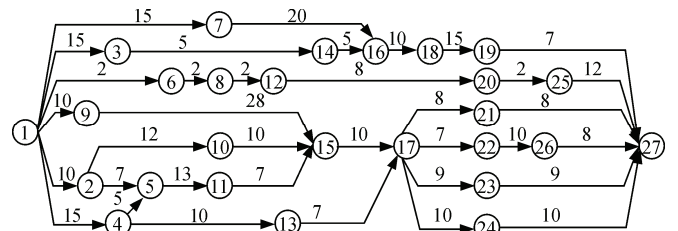


图 3 某自主防空作战平台运载器分系统研制进度网络

通过分析该平台研制方案及咨询专家可知：该

平台研制进度管理符合 PERT 网络计划技术的使用条件, 因此按照第 2 节给出的方法对其进行 Monte Carlo 模拟从而确定关键路径。

这里仅以某自主防空作战平台运载器分系统为例。某自主防空作战平台运载器分系统研制进度网

络图如图 3 所示。

首先, 运用 PERT 的三时估算法计算运载器分系统网络图中各工序持续时间估计值的期望  $\bar{t}_{ij}$  及方差  $\sigma_{ij}^2$ , 估计时间其计算结果如表 1 所示。现对其进行 Monte Carlo 模拟从而找出其关键路径。

表 1 各工序时间估计值期望及其方差值

d

活动(i-j)	紧前活动	最乐观估计 时间(a)	最可能估计 时间(m)	最悲观估计 时间(b)	$\bar{t}_{ij}$	$\sigma_{ij}^2$
1-2	—	8	10	14	10.333	1.000
1-3	—	11	15	18	14.833	1.361
1-4	—	14	15	17	15.167	0.250
1-6	—	1	2	3	2.000	0.111
1-7	—	10	15	19	14.833	2.250
1-9	—	8	10	14	10.333	1.000
2-5	1-2	5	7	10	7.167	0.694
2-10	1-2	9	12	14	11.833	0.694
3-14	1-3	4	5	7	5.167	0.250
4-5	1-4	3	5	8	5.167	0.694
4-13	1-4	7	10	13	10.000	1.000
5-11	2-5 4-5	12	13	17	13.500	0.694
6-8	1-6	1	2	3	2.000	0.111
7-16	1-7	18	20	22	20.000	0.444
8-12	6-8	1	2	3	2.000	0.111
9-15	1-9	25	28	31	28.000	1.000
10-15	2-10	7	10	13	10.000	1.000
11-15	5-11	5	7	8	6.833	0.250
12-20	8-12	5	8	10	7.833	0.694
13-17	4-13	6	7	9	7.167	0.250
14-16	3-14	4	5	6	5.000	0.111
15-17	9-15; 10-15; 11-15	8	10	14	10.333	1.000
16-18	7-16; 14-16	9	10	11	10.000	0.111
17-21	13-17; 15-17	6	8	12	8.333	1.000
17-22	13-17; 15-17	2	7	9	6.500	1.361
17-23	13-17; 15-17	8	9	10	9.000	0.111
17-24	13-17; 15-17	8	10	12	10.000	0.444
18-19	16-18	13	15	17	15.000	0.444
19-27	18-19	5	7	8	6.833	0.250
20-25	12-20	1	2	3	2.000	0.111
21-27	17-21	6	8	10	8.000	0.444
22-26	17-22	8	10	13	10.167	0.694
23-27	17-23	8	9	10	9.000	0.111
24-27	17-24	8	10	13	10.167	0.694
25-27	20-25	9	12	14	11.833	0.694
26-27	22-26	7	8	9	8.000	0.111

运用 Monte Carlo 对运载器分系统网络图中各个工序时间进行模拟。令模拟次数为 10 000 次, 运用 Matlab 编程计算得到各工序的关键度, 此外还可以确定每个节点的次关键活动及局部关键活动。当节点前仅有一个工序时即为该节点的次关键活动, 若节点前所有工序的关键度均为 0, 表明这些工序存在成为关键工序的可能极小, 如对于节点 27 前的工序来说, 关键工序为 {26-27}, 次关键活动为 {19-27} 和 {24-27}, 工序 {21-27, 23-27, 25-27} 成为关键工序的可能几乎为 0, 如表 2 所示。根据模拟所得到的关键度的大小, 依次进行比较, 从而得到各个节点的关键工序, 在表 2 中用斜体标出。

比对模拟结果可知: 终点节点前的关键活动是

{26-27}, 沿着该工序逆向寻找比对, 找到节点 26 前的关键活动是 {22-26}, 以此类推, 得到整个 PERT 网络的所有关键活动为 {1-4, 4-5, 5-11, 11-15, 15-17, 17-22, 22-26, 26-27}, 将他们依次相连即可得到某自主防空作战平台运载器分系统研制进度网络的关键路径, 为: 27-26-22-17-15-11-5-4-1。由此可以看出: 研制过程中须重点关注这些活动, 加强监控管理, 从而避免因这些活动的延误而耽误整个研制进度。此外, 这些活动即为关键技术存在的活动, 通过分析这些关键活动可知其变动对整个研制进度的影响, 便于总体单位调整计划, 从而更好地完成研制工作。

表 2 各工序关键度值

工序号	活动(i-j)	$M_i/N$	工序号	活动(i-j)	$M_i/N$
1	1-2	0.037 9	19	12-20	0
2	1-3	0	20	13-17	0
3	1-4	0.962 7	21	14-16	0
4	1-6	0	22	15-17	0.999 2
5	1-7	0.000 8	23	16-18	0.000 8
6	1-9	0.111 2	24	17-21	0
7	2-5	0.037 5	25	17-22	0.993 0
8	2-10	0	26	17-23	0
9	3-14	0	27	17-24	0.006 2
10	4-5	0.961 9	28	18-19	0.000 8
11	4-13	0	29	19-27	0.000 8
12	5-11	0.889 3	30	20-25	0
13	6-8	0	31	21-27	0
14	7-16	0.000 8	32	22-26	0.993 0
15	8-12	0	33	23-27	0
16	9-15	0.111 2	34	24-27	0.006 2
17	10-15	0	35	25-27	0
18	11-15	0.888 0	36	26-27	0.993 0

### 4 结束语

对于项目进度管理，尤其是武器装备研制进度管理，找出影响研制进度的关键工序进而重点突破以缩短工期至关重要。笔者将 Monte Carlo 运用到 PERT 网络中，进行 Monte Carlo 模拟仿真，进而找到了一种确定 PERT 网络关键路径的方法。Monte Carlo 模拟仿真借助计算机高效地解决了用数学方法求解动态复杂网络问题，准确便捷，用关键度确定关键路径直观清晰，相对经典 CPM 寻找关键路

径来说更为准确。仿真结果表明：该方法理论上科学可行，实践中方便有效，有效地解决了工期不确定的问题，可为决策者提供参考依据。

### 参考文献：

[1] 徐哲. 武器装备项目进度、费用与风险管理[M]. 北京：国防工业出版社, 2011: 29-32.

[2] 钟笑萍. 模糊网络计划技术研究与应用[D]. 西安：西安理工大学, 2006: 1-2.

[3] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社, 2005: 290-294.

[4] 张丹. PERT 网络总工期概率特性研究[D]. 大连：大连理工大学, 2011: 20-22.

[5] 谢家平, 刘宇熹. 管理运筹学[M]. 北京：中国人民大学出版社, 2010: 178-180.

[6] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社, 2006: 144-147.

[7] 张厚先, 施柏男. 基于蒙特卡罗方法的网络计划资源优化[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(6): 1-2.

[8] Soroush H M. The most critical path in a PERT network:a heuristic approach[J]. European Journal of Operational Research, 1994, 78(1): 93-105.

[9] Martin J J. Distribution of the time through a directed, acyclic network[J]. Operations Research, 1965, 13(1): 46-66.

[10] Sigal C E, Pritsker A B, Solberg J J. The use of cutsets in Monte Carlo analysis of stochastic networks[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 1979, 21(4): 376-384.

[11] 美国陆军武器装备司令部. 系统分析与费用：效能分析[Z]. 吴志革, 译. 北京：兵器防工业部兵器系统工程研究所, 1982.

[12] 罗云, 张际良, 蔡鲁闻, 等. GJB 1364-1992 装备费用-效能分析[S]. 1992: 1.

[13] 穆中林, 于雷, 廖俊, 等. 编队对地攻击作战效能指标体系[J]. 火力与指挥控制, 2011, 36(1): 87-89.

[14] 裴云, 王斌. 战斗机系统作战效能分析[J]. 火力与指挥控制, 2008, 33(1): 126-129.

[15] 许腾, 袁华, 陈敏, 等. 海军战斗效能评估[M]. 北京：海潮出版社, 2006: 1-21.

[16] 李斌, 刘建强, 董奎义. 基于神经网络的舰载直升机反潜武器系统作战效能评估[J]. 舰船电子工程, 2007, 27(5): 50-52.

[17] 孙鹏, 杨建军. 第四代战斗机作战效能评估[J]. 飞航导弹, 2010(6): 68-72.

[18] 吴静, 王琪. 编队协同对地攻击总体作战效能评估[J]. 计算机系统应用, 2012, 21(3): 83-86.

[19] 艾剑良, 钱国红. 对地攻击机攻击阶段的作战效能分析模型[J]. 火力与指挥控制, 2000, 25(6): 6.

[20] 艾剑良, 钱国红. 一种攻击机机群作战效能的分析方法[J]. 火力与指挥控制, 2000, 25(3): 9-12.

[21] 腾鹏, 张斌, 鲁艺. 武装直升机应用红外干扰弹作战效能评估[J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(10): 131-133.

[22] 王安丽, 张安, 李杰奇. 战斗机中远距空战建模与仿真分析[J]. 指挥控制与仿真, 2012, 34(3): 90-94.

\*\*\*\*\*

(上接第 14 页)

### 参考文献：

[1] 王丕宏, 张红. 作战效能分析研究[J]. 电光与控制, 1995(4): 15-20.

[2] 张鹏, 郭志广, 王士杰, 等. 基于主成分分析的战斗直升机作战效能评估[J]. 科学技术与工程, 2008, 8(7): 1929-1932.

[3] 张旗, 张安. 武装直升机装备子母弹作战效能分析[J]. 火力与指挥控制, 1997(2): 55-59.

[4] 黄俊, 向锦武, 武哲, 等. 攻击直升机作战效能评估[J]. 南京航空航天大学学报, 1999, 31(6): 620-625.

[5] 张安, 谢剑锋, 张旗. 武装直升机反坦克群攻击效能评估研究[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 11(11): 99-104.

[6] 叶新明, 姜长生, 吴庆宪. 武装直升机对地攻击阶段作战效能评估[J]. 电光与控制, 2009, 16(5): 5-8.

[7] 张安, 章敏, 张旗. 直升机空战分析仿真研究[J]. 系统仿真学报, 1998, 10(2): 30-34.

[8] 宋伟健, 唐金国, 王雷, 等. 直升机反潜作战效能评估模型研究[J]. 海军航空工程学院学报, 2012, 27(6): 709-712.

[9] Austin F, Carbone G, Falco M, et al. Automated Maneuvering Decisions for Air-to-Air combat[J]. AIAA 87-2393: 659-669.

[10] 张安, 何建华, 陈绍炜. 战斗机作战效能分析的数学描述[J]. 航空电子技术, 2001, 32(4): 39-42.