doi: 10.7690/bgzdh.2016.01.020

随机齐射模型的特征函数分析方法

翟　璐[1]，任耀峰[1]，刘鹏宇[2]
（1. 海军工程大学理学院，武汉 430033；2. 中国人民解放军 92853 部队，辽宁 葫芦岛 125100）

摘要：针对随机齐射模型战损分析误差较大的问题，提出一种随机齐射模型的特征函数分析方法。利用有效攻击导弹和防御导弹数量的分布律和独立随机变量随机和的性质，导出了损伤的特征函数，通过特征函数的反演公式研究战损量的概率分布，得到了理论剩余兵力的分布函数。分析结果表明：该方法能计算出随机齐射模型中各种事件的概率，为分析随机齐射模型提供了一个精确的方法。

关键词：随机齐射模型；二项分布；正态分布；特征函数；剩余兵力
中图分类号：TJ760.6　　**文献标志码**：A

Analysis Method of Characteristic Functions Stochastic Salvo Model

Zhai Lu[1], Ren Yaofeng[1], Liu Pengyu[2]
(1. *College of Science*, *Naval University of Engineering*, *Wuhan* 430033, *China*;
2. *No*. 92853 *Unit of PLA*, *Huludao* 125100, *China*)

Abstract: A new approach is proposed to approximate the stochastic salvo model with characteristic functions. By the distribution of the difference of the total number of well-targeted offensive missiles and the total number of well-targeted defensive missiles per salvo and the characteristic function of random sum of independent random variables, the characteristic function of the nominal surviving force strength is derived. Then the distribution function of the nominal surviving force strength is obtained by the inversion formulae, and the probabilities of some outcomes of one exchange of salvos can be calculated by the distribution functions. This approach can be used to analyze the stochastic salvo model precisely.

Keywords: stochastic salvo model; binomial distribution; normal distribution; characteristic function; surviving force

0　引言

战损分析通过对参战双方兵力损耗的研究。直接或间接对双方的生存情况及战争的胜负做出定量与定性的描述和判断，是军事运筹学的一个重要研究领域。兰彻斯特方程是第一个对战损进行定量分析的方法，在作战模拟的数学建模中有广泛的应用，其他常用的战损分析方法还有蒙特卡罗法和马尔可夫链法等[1]。但是这些方法主要适用于大规模常规火力连续性战斗。

随着科学技术的发展，导弹战斗已经成为现代海战的主要模式。舰艇导弹战斗威力大、精度高，装备战损量巨大，兵力变化呈现“跳跃”性而非“连续”性，兰彻斯特方程等经典方法不能对其进行精确描述；因此，休斯（W.P.Jr.Hughes）在 1986 年提出了齐射模型[2]，并对一些导弹战斗进行了分析，得到了很好的效果。2005 年，阿姆斯特朗（M.J.Amstrong）又提出了随机齐射模型[3]，使得模型能更准确地描述导弹战斗过程。2011 年阿姆斯特朗对随机齐射模型中的相关假设进行了论证，证明了随机齐射模型的有效性[4]。齐射模型是一个不同于经典的兰彻斯特方程的新方法，能很好地描述现代战争中的导弹战斗，也可用于航母编队之间的飞机攻击战斗，得到各国学者的广泛认同，成为分析现代战争的方法之一。

随机齐射模型考虑了许多随机因素对战斗的影响，能更准确地描述导弹战斗过程，同时也使模型变得非常复杂，很难利用解析方法直接进行战损分析。由中心极限定理的理论知道，阿姆斯特朗采用的近似计算方法在弹齐射规模较大时近似效果应该是比较好的；但在齐射规模较小，导弹命中概率较大或较小的情形有较大的误差。基于此，笔者给出一种利用特征函数分析随机齐射模型的新方法。

1　随机齐射模型

2005 年阿姆斯特朗建立了随机齐射模型，随后一些学者又给出了几种推广的随机齐射模型，其基本假设和模型如下。设有红蓝双方 2 个舰艇编队，各自编队中的舰艇种类相同，每艘舰艇装备的导弹

收稿日期：2015-09-06；**修回日期**：2015-10-11
基金项目：全军军事学研究生课题（2011JY002-423）资助课题
作者简介：翟　璐（1987—），男，江苏人，在读硕士，从事军事系统建模与优化决策研究。

种类也相同。双方的初始兵力分别为 A 和 B，即战斗开始时双方的作战舰艇数量分别为 A 和 B。红方每艘舰艇所能发射的最大攻击导弹量为 n_α，最大防御导弹量为 n_y；蓝方每艘舰艇所能发射的最大攻击导弹量为 n_β，最大防御导弹量为 n_z；α_i 和 β_j 分别为红蓝双方第 i 艘和第 j 艘舰艇的攻击力，即在一轮齐射中向对方成功发射的攻击导弹数量；p_α 和 p_β 分别为红蓝双方每枚攻击导弹精确瞄准并成功发射的概率，p_y 和 p_z 分别为红蓝双方每枚防御导弹精确瞄准并成功发射的概率；$u_i\ (i=1,2,3,\cdots)$ 为红方被对方单枚导弹命中后损失的战斗力，$u_i\ (i=1,2,3,\cdots)$ 独立同分布，其数学期望和方差为 μ_u 和 σ_u^2；$v_i\ (i=1,2,3,\cdots)$ 为蓝方被对方单枚导弹命中后损失的战斗力，$v_i\ (i=1,2,3,\cdots)$ 独立同分布，其数学期望和方差为 μ_v 和 σ_v^2。

假设各舰艇发射导弹相互独立，各舰艇精确瞄准并成功发射的攻击和防御导弹数量分别服从二项分布；因此 α_i 服从数学期望 $\mu_\alpha=n_\alpha p_\alpha$，$\sigma_\alpha^2=n_\alpha p_\alpha(1-p_\alpha)$ 的二项分布，红方精确瞄准并成功发射的攻击导弹的总数量，即红方的总的攻击力 $\mathrm{Off_A}=\sum_{i=1}^{A}\alpha_i$ 服从数学期望为 $An_\alpha p_\alpha$，方差为 $An_\alpha p_\alpha(1-p_\alpha)$ 的二项分布，也即 $\mathrm{Off_A}\sim B(An_\alpha,p_\alpha)$。

同样蓝方精确瞄准并成功发射的防御导弹的总数量，即蓝方的防御力 $\mathrm{Def_B}$ 服从数学期望为 $Bn_z p_z$，方差为 $Bn_z p_z(1-p_z)$ 的二项分布，也即 $\mathrm{Def_B}\sim B(Bn_z,p_z)$。

一轮齐射中红方成功发射且未被拦截的导弹理论数量为 $\mathrm{Net_{AB}}=\mathrm{Off_A}-\mathrm{Def_B}$，一轮齐射中蓝方的理论战损为 $\sum_{i=1}^{\mathrm{Net_{AB}}}v_i$；因此一轮齐射后蓝方的理论剩余兵力为 $B_1^*=B-\sum_{i=1}^{\mathrm{Net_{AB}}}v_i$。

2　随机齐射模型的正态近似分析方法

对于 B_1^* 的分布，阿姆斯特朗采用正态近似的方法，先利用正态分布近似二项分布，假定 $\mathrm{Net_{AB}}$ 服从正态分布，其数学期望和方差分别为：

$$\mu_{\mathrm{Net_{AB}}}=E(\mathrm{Net_{AB}})=E(\mathrm{Off_A})-E(\mathrm{Def_B})=A\mu_\alpha-B\mu_z\text{；}\tag{1}$$

$$\sigma_{\mathrm{Net_{AB}}}^2=D(\mathrm{Net_{AB}})=D(\mathrm{Off_A})+D(\mathrm{Def_B})=A\sigma_\alpha^2+B\sigma_z^2\text{。}\tag{2}$$

记 $\mathrm{Net_{AB}}$ 的概率密度为 $g_{\mathrm{Net_{AB}}}(t)$，再借鉴随机存储理论的思想，阿姆斯特朗假定 B_1^* 服从正态分布，其数学期望和方差分别为：

$$\mu_{B_1^*}=E[B]-E[\mathrm{Net_{AB}}]E[v_i]=B-(A\mu_\alpha-B\mu_z)\mu_v\text{；}\tag{3}$$

$$\sigma_{B_1^*}^2=\mu_{\mathrm{Net_{AB}}}\sigma_i^2+\sigma_{\mathrm{Net_{AB}}}^2\mu_i^2-2\sigma_i^2\int_{-\infty}^{0}\mathrm{t}g_{\mathrm{Net_{AB}}}(t)\mathrm{d}t\text{。}\tag{4}$$

记 B_1^* 的概率密度为 $g_{B_1^*}(x)$，B_1^* 的分布函数为 $G_{B_1^*}(x)$。类似地，记一轮齐射后红方的理论剩余兵力为 $A_1^*=A-\sum_{i=1}^{\mathrm{Net_{BA}}}u_i$，$A_1^*$ 的概率密度为 $g_{A_1^*}(x)$，A_1^* 的分布函数为 $G_{A_1^*}(x)$。

记 B_1 为蓝方的实际剩余兵力，由于 B_1 满足 $0\leqslant B_1\leqslant B$，有 $B_1=\min\{B,\max(0,B_1^*)\}$。考虑到导弹的数量是非负整数，在使用正态分布近似计算 B_1 时，还要进行 $\pm\mu_v/2$ 的修正。利用双方理论剩余兵力 A_1^* 和 B_1^* 的分布函数 $G_{A_1^*}(x)$ 和 $G_{B_1^*}(x)$ 可以求得一轮齐射后事件的概率如下：

1) 蓝方被歼灭没有兵力剩余的概率为

$$P(B_1\leqslant 0)=G_{B_1^*}(0+\mu_v/2)\text{。}\tag{5}$$

2) 蓝方有兵力损耗且有兵力剩余的概率为

$$P(0<B_1<B)=G_{B_1^*}(B-\mu_v/2)-G_{B_1^*}(0+\mu_v/2)\text{。}\tag{6}$$

3) 蓝方没有战损的概率为

$$P(B_1\geqslant B)=1-G_{B_1^*}(B-\mu_v/2)\text{。}\tag{7}$$

4) 红方获胜的概率为

$$P(C)=\left[1-G_{A_1^*}(0+\mu_v/2)\right]\left[G_{B_1^*}(0+\mu_v/2)\right]\text{。}\tag{8}$$

5) 蓝方获胜的概率为

$$P(D)=\left[1-G_{B_1^*}(0+\mu_v/2)\right]\left[G_{A_1^*}(0+\mu_v/2)\right]\text{。}\tag{9}$$

6) 双方同归于尽的概率为

$$P(E)=\left[G_{A_1^*}(0+\mu_v/2)\right]\left[G_{B_1^*}(0+\mu_v/2)\right]\text{。}\tag{10}$$

3　随机齐射模型的特征函数分析方法

上章中分析随机齐射模型时 2 次采用了用正态

分布近似的方法，当舰艇数量和导弹数量较小时误差比较大。这一章笔者引进特征函数的方法，对随机齐射模型进行分析，可以避免产生较大的误差。

设红方第 i 枚导弹命中目标时对蓝方舰艇造成的战损量为 $v_i\ (i=1,2,3,\cdots)$，$v_i\ (i=1,2,3,\cdots)$ 为非负独立同分布随机变量。假定 v_1 为连续型随机变量，记 v_1 的分布函数为 $F(x)$，特征函数为 $f(t)$，数学期望为 μ_v，方差为 $\sigma_v{}^2$。

由于 $\mathrm{Off_A} \sim B(An_\alpha, p_\alpha), \mathrm{Def}_B \sim B(Bn_z, p_z)$，且相互独立，一轮齐射后，红方突破蓝方防御火力的攻击导弹理论数量的分布律为：

$$P(\mathrm{Off_A}-\mathrm{Def_B}=k)=\sum_m P(\mathrm{Off_A}=m)P(\mathrm{Def_B}=m-k)=$$
$$\sum_m \binom{An_\alpha}{m}\binom{Bn_z}{m-k} p_\alpha^m q_\alpha^{An_\alpha-m} p_z^{m-k} q_z^{Bn_z-m+k}。\quad (11)$$

其中：$\max(0,k)\leqslant m\leqslant \min(An_\alpha, Bn_z+k)$；$-Bn_z\leqslant k\leqslant An_\alpha$。

一轮齐射后对蓝方造成的总损伤为 $Z=\sum\limits^{\mathrm{Off_A}-\mathrm{Def_B}} v_i$，记 $f_Z(t)$ 为 Z 的特征函数，利用随机足标和的特征函数方法[5]，得

$$f_Z(t)=E\left(\mathrm{e}^{itZ}\right)=$$
$$\sum_{k\geqslant 0} P(\mathrm{Off_A}-\mathrm{Def_B}=k)E\left(\mathrm{e}^{it\sum_{i=1}^{k} v_i}\right)+$$
$$\sum_{k<0} P(\mathrm{Off_A}-\mathrm{Def_B}=k)E\left(\mathrm{e}^{it\sum_{i=1}^{-k}(-v_i)}\right)=$$
$$\sum_{k=0}^{An_\alpha} P(\mathrm{Off_A}-\mathrm{Def_B}=k)\left[f(t)\right]^k+$$
$$\sum_{k=-Bn_z}^{-1} P(\mathrm{Off_A}-\mathrm{Def_B}=k)\left[f(-t)\right]^{-k}。\quad (12)$$

由特征函数的反演公式，得 Z 的分布函数

$$F_Z(x)=\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-ity}-\mathrm{e}^{-itx}}{it}f_Z(t)\,\mathrm{d}t。\quad (13)$$

所以一轮齐射后蓝方理论剩余兵力 B_1^* 的分布函数为

$$F_{B_1^*}(x)=P(B_1^*\leqslant x)=P\left[(B-Z)\leqslant x\right]=$$
$$P(Z\geqslant B-x)=1-P(Z<B-x)=1-F_Z(B-x)=$$
$$1-\lim_{y\to-\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-ity}-\mathrm{e}^{-it(B-x)}}{it}f_Z(t)\,\mathrm{d}t。\quad (14)$$

类似地，可以求得一轮齐射后红方理论剩余兵力 A_1^* 的分布函数，记为 $F_{A_1^*}(x)$。B_1 为蓝方的实际剩余兵力，利用双方理论剩余兵力 A_1^* 和 B_1^* 的分布函数 $F_{A_1^*}(x)$ 和 $F_{B_1^*}(x)$ 可求得一轮齐射后事件的概率如下：

1) 蓝方被歼灭没有兵力剩余的概率为

$$P(B_1\leqslant 0)=F_{B_1^*}(0)。\quad (15)$$

2) 蓝方有兵力损耗且有兵力剩余的概率为

$$P(0<B_1<B)=F_{B_1^*}(B)-F_{B_1^*}(0)。\quad (16)$$

3) 蓝方没有战损的概率为

$$P(B_1\geqslant B)=1-F_{B_1^*}(B)。\quad (17)$$

4) 红方获胜的概率为

$$P(C)=\left[1-F_{A_1^*}(0)\right]\left[F_{B_1^*}(0)\right]。\quad (18)$$

5) 蓝方获胜的概率为

$$P(D)=\left[1-F_{B_1^*}(0)\right]\left[F_{A_1^*}(0)\right]。\quad (19)$$

6) 同归于尽的概率为

$$P(E)=\left[F_{A_1^*}(0)\right]\left[F_{B_1^*}(0)\right]。\quad (20)$$

4 算例分析

设红方的初始兵力为 3 艘舰艇，蓝方的初始兵力从 1 依次增加到 6，双方舰艇种类相同，$n_\alpha=8, n_z=4, p_\alpha=p_z$。取导弹毁伤效果 v_1 的期望 $\mu=1/3$，方差 $\sigma^2=(1/7.5)^2$，这个数据来自 Bookings 的研究[6]。考察一轮齐射后，求蓝方被歼灭的概率。在特征函数分析方法中，需要导弹毁伤效果 v_1 的概率分布。这里分别取 v_1 的分布为期望 $\mu=1/3$，方差 $\sigma^2=(1/7.5)^2$ 的正态分布和均匀分布考察计算结果。

用 $G_{B_1^*}(x)$ 表示 B_1^* 的近似正态分布；$F_{B_1^*(n)}(x)$ 表示 v_1 服从正态分布时 B_1^* 的分布；$F_{B_1^*(u)}(x)$ 表示 v_1 服从均匀分布时 B_1^* 的分布。通过编程计算，分别得 $p_\alpha=p_z=0.2$，$p_\alpha=p_z=0.68$，$p_\alpha=p_z=0.9$ 时蓝方被

歼灭的概率 $F_{B_1^*}(0), F_{B_1^*(n)}(0), F_{B_1^*(u)}(0)$，如表 1～表 3。

表 1　$p_\alpha = p_z = 0.2$　　%

B	1	2	3	4	5	6
$F_{B_1^*}(0)$	82.54	10.2	0.13	0	0	0
$F_{B_1^*(n)}(0)$	51.03	21.1	1.10	0.01	0	0
$F_{B_1^*(u)}(0)$	49.99	21.0	1.20	0	0	0

表 2　$p_\alpha = p_z = 0.68$　　%

B	1	2	3	4	5	6
$F_{B_1^*}(0)$	100	98.44	45.10	2.27	0.02	0
$F_{B_1^*(n)}(0)$	100	95.33	38.37	0.95	0	0
$F_{B_1^*(u)}(0)$	100	95.30	38.35	0.92	0.01	0

表 3　$p_\alpha = p_z = 0.9$　　%

B	1	2	3	4	5	6
$F_{B_1^*}(0)$	100	100.00	96.65	0.07	0	0
$F_{B_1^*(n)}(0)$	100	99.99	79.00	1.61	0	0
$F_{B_1^*(u)}(0)$	100	99.99	79.05	1.59	0.01	0

特征函数方法中的公式推导不需要近似处理，编程计算 $F_{B_1^*(n)}(0)$ 与 $F_{B_1^*(u)}(0)$ 的误差很小，可以看作是随机齐射模型的精确值。由于 $\sigma^2 = (1/7.5)^2$，方差的值很小，虽然 v_1 的 2 种分布不同，$F_{B_1^*(n)}(0)$ 与 $F_{B_1^*(u)}(0)$ 的值是很接近的。可以看出：用正态分布近似代替 B_1^* 的分布进行计算时，某些场合的误差是很大的。特别当 p_α 和 p_z 较大或者较小时误差较大，如表中所示，取 $A = 3$，$B = 1$，$p_\alpha = p_z = 0.2$ 时，$F_{B_1^*(u)}(0) = 51.03\%$，$F_{B_1^*(u)}(0) = 49.99\%$；然而 $F_{B_1^*}(0) = 82.54\%$。

通过编程计算，还可以算得 $p_\alpha = p_z = 0.2$，$p_\alpha = p_z = 0.68$，$p_\alpha = p_z = 0.9$ 时，用正态分布近似代替 B_1^* 的分布，v_1 服从正态分布和 v_1 服从均匀分布时，由特征函数方法计算出的各种情况下相关事件的概率 $P(0 < B_1 < B)$，$P(B_1 > B)$，$P(C)$，$P(D)$，$P(E)$。同样可以看出，当 p_α 和 p_z 较大或者较小时，利用正态分布近似代替 B_1^* 的分布进行计算时也存在较大的误差。

5　结束语

笔者引进特征函数的方法对随机齐射模型进行分析，利用独立随机变量随机和的特征函数方法求得蓝方总损伤的特征函数，再由特征函数的反演公式得到蓝方总损伤的分布函数，进而得到蓝方理论剩余兵力的分布函数，由此能够通过编程计算随机齐射模型中各种事件的概率。这是一个精确的方法，弥补了正态分布近似方法的不足，在实际应用中可以获得准确的分析结果。

参考文献：

[1] 张野鹏. 作战模拟基础[M]. 北京：高等教育出版社，2004: 249-351.
[2] Hughes W P. A Salvo Model of Warship in Missle Combat Used to Evaluate Their Staying Power. Naval Res.Logist[J]. 1995, 42(2): 267-289.
[3] Armstrong M J. A stochastic salvo model for naval surface combat[J]. Oper Res ,2005, 53(5): 830-841.
[4] Armstrong M J. A verification study of the stochastic salvo combat model[J]. Oper. Res., 2011, 186: 23-28.
[5] 苏淳. 概率论[M]. 2版. 北京：科学出版社, 2010: 79-86.
[6] Hughes W P. Fleet tactics and coastal combat[M]. Naval Institute Press, 2000: 56-58.