

doi: 10.7690/bgzdh.2016.06.008

惯性辅助的单频 GPS 整周模糊度快速求解

彭旭飞^{1,2}, 陆志东^{1,2}, 岳亚洲^{1,2}, 高关根^{1,2}

- (1. 中国航空工业集团西安飞行自动控制研究所, 西安 710065;
2. 飞行器控制一体化技术国防重点实验室, 西安 710065)

摘要: 为改善法矩阵病态性, 实现整周模糊度快速求解, 提出惯性导航系统(inertial navigation system, INS)辅助单频 GPS 整周模糊度求解算法。将惯性伪距单差、GPS 伪距双差、载波相位双差联立得到模糊度浮点解及其协方差阵, 利用 LAMBDA 算法求解出整周模糊度固定解。分析引入惯性信息改善复共线性和病态性的原因, 并利用 GPS 实测数据与仿真 INS 数据进行实验验证。实验结果表明: INS 辅助信息使得法矩阵条件数减小 2 个数量级, 模糊度衰减因子下降 55.81%, 整周模糊度固定解求解的时间缩短 75.44%, 方法可行。

关键词: 惯性辅助; 载波相位差分; 整周模糊度; 快速解算; 病态性

中图分类号: TJ861 **文献标志码:** A

Fast Resolution of Single Frequency GPS Integer Ambiguity with INS Aiding

Peng Xufei^{1,2}, Lu Zhidong^{1,2}, Yue Yazhou^{1,2}, Gao Guan'gen^{1,2}

- (1. Xi'an Flight Automatic Control Research Institute, Aviation Industry Corporation of China, Xi'an 710065, China;
2. National Key Laboratory on Flight Vehicle Control Integrated Technology, Xi'an 710065, China)

Abstract: In order to improve the ill-condition of normal matrix and achieve ambiguity fast resolution, an inertial navigation system (INS) aided GPS integer ambiguity algorithm is proposed. INS single-difference pseudo range, GPS double-difference pseudo range and GPS double-difference carrier phase is used to get the float ambiguities and their variance-covariance matrix. Then LAMBDA algorithm is used to get the integer ambiguity. The reason why INS aided information can improve collinear and ill-condition is analyzed. Finally, an experiment is conducted with the GPS test data and the inertial navigation data from simulation. The results show that, with INS aided information, the condition number of normal matrix is dropping two orders of magnitude, 55.81% reduction of ADOP and 75.44% less time to resolve integer ambiguity. The method is feasible.

Keywords: INS aiding; carrier phase differential; integer ambiguity; fast resolution; ill-conditioned

0 引言

使用 GPS 的双差载波相位信息可以实现精度达厘米级甚至是毫米级的精密相对定位, 快速高可靠的整周模糊度求解是其工程应用的关键^[1]。

单频 GPS 整周模糊度求解^[2-3]分 3 步: 浮点解及其协方差阵的估计、模糊度固定解的搜索、结果的检验与确认(Ratio 检验)。在空中加油、舰载机着舰等对定位实时性要求较高的领域, 需要整周模糊度快速求解。但是由于观测历元少, 卫星空间分布变化缓慢, 观测方程存在复共线性, 导出的法矩阵严重病态, 解算的模糊度浮点解偏差很大, 因而无法通过检验得到最终固定解^[4-5]。

为改善病态性, 文献[6-9]提出了虚拟观测法、岭估计法和 TIKHONOV 正则化法等。但这些方法都是在观测信息有限的情况下通过数学变换改善模型病态。文献[10-14]提出加入 INS 辅助可以改善模

糊度浮点解精度, 提升模糊度搜索效率, 但是并未从本质上论述 INS 辅助信息对于观测矩阵的影响。在此基础上, 笔者提出 INS 辅助的单频 GPS 整周模糊度求解算法并进行实验验证。试验结果表明: 该算法可以改善模型病态, 缩短模糊度固定的时间, 实现整周模糊度快速解算。

1 病态问题基本原理

根据文献[15-16], 得 Gauss-Markov 模型:

$$\left. \begin{aligned} L &= AX + \Delta \\ E(\Delta) &= 0, D(\Delta) = \sigma_0^2 P^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: L 为 $n \times 1$ 观测向量; A 为 $n \times m$ 设计阵, $\text{rank}(A) = m$; X 为 $m \times 1$ 未知参数向量; Δ 为 $n \times 1$ 观测误差向量; σ_0^2 为单位权方差; P 为权矩阵。

X 的最小二乘解为

$$\hat{X} = N^{-1}W = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (2)$$

收稿日期: 2016-01-29; 修回日期: 2016-02-28

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863 计划)(2012AA7053029)

作者简介: 彭旭飞(1991—), 男, 山西人, 硕士, 从事导航、制导与控制研究。

其中： $N = A^T P A$ 是法矩阵； $W = A^T P L$ 。

如果解 X 不是唯一的，则是秩亏问题；如果解 X 是唯一的，但是不稳定，则是病态问题。定义法矩阵的条件数

$$K = \|N^{-1}\| \|N\| = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(N^T N)}{\lambda_{\min}(N^T N)}} \quad (3)$$

病态情况下，条件数非常大。且解 X 稳定性差，可靠性低，观测向量的微小扰动都会导致解的较大偏差。

观测数据不足是引起病态的原因之一，此时数据采样为局部采样或接近重复采样，观测矩阵 A 的 n 个列向量近似地落在维数低于 n 的 R^m 的超平面内，未知参数 X 的向量存在着复共线性。

在求解 GPS 整周模糊度过程中，对于一条基线的双差模型，观测到 K 颗卫星，每个历元可组成 $k-1$ 个独立的观测方程。在基线解中有 $K+2$ 个未知参数 ($K-1$ 个整周模糊度，3 个基线向量)，在 $K \geq 4$ 的情况下，只观测 2 个历元即可解算出未知参数。但实际上，如历元间隔很小，参数估值偏差较大，其结果不可信。主要是因为 2 个历元观测间隔太小，观测结构基本相同，两历元的观测属于近似重复观测，导致矩阵 A 存在严重的复共线性，参数估计病态。

2 算法设计与抗病态分析

2.1 算法设计

如图 1 所示，为了改善病态性，将 INS 伪距单差、GPS 伪距双差、GPS 载波相位双差联立求解。

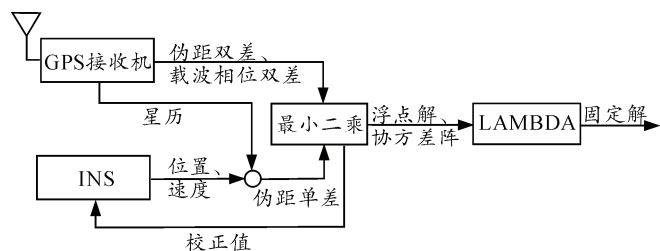


图 1 INS 辅助 GPS 整周模糊度求解流程

如图 2 所示，卫星的位置分别为 (x^i, y^i, z^i) 、 (x^j, y^j, z^j) ，基准站的位置为 (x_r, y_r, z_r) ，移动站的准确位置和估计位置分别为 (x_u, y_u, z_u) 和 $(x_{u_a}, y_{u_a}, z_{u_a})$ 。移动站准确位置与估计位置的偏差为：

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= x_u - x_{u_a} \\ \delta y &= y_u - y_{u_a} \\ \delta z &= z_u - z_{u_a} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

卫星 i 到基准站 r 的距离为：

$$r_r^i = \sqrt{(x_r - x^i)^2 + (y_r - y^i)^2 + (z_r - z^i)^2} \quad (5)$$

卫星 i 到移动站 u_approx 的距离为：

$$r_{u_a}^i = \sqrt{(x_{u_a} - x^i)^2 + (y_{u_a} - y^i)^2 + (z_{u_a} - z^i)^2} \quad (6)$$

卫星 i 到移动站 u 的距离为：

$$r_u^i = \sqrt{(x_u - x^i)^2 + (y_u - y^i)^2 + (z_u - z^i)^2} \quad (7)$$

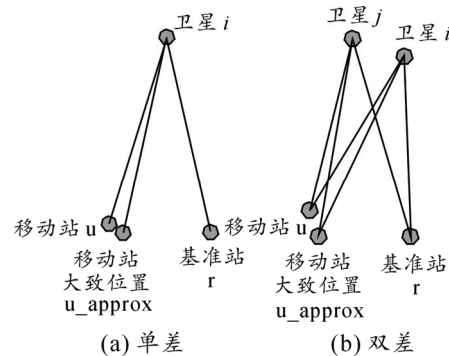


图 2 单差、双差示意图

将式 (7) 线性化，即将 r_u^i 在 $(x_{u_a}, y_{u_a}, z_{u_a})$ 处用一阶泰勒级数展开：

$$r_u^i = r_{u_a}^i + \frac{\partial r_{u_a}^i}{\partial x_{u_a}} \delta x + \frac{\partial r_{u_a}^i}{\partial y_{u_a}} \delta y + \frac{\partial r_{u_a}^i}{\partial z_{u_a}} \delta z \quad (8)$$

取：

$$l_{u_a}^i = \frac{\partial r_{u_a}^i}{\partial x_{u_a}} = \frac{x_{u_a} - x^i}{r_{u_a}^i};$$

$$m_{u_a}^i = \frac{\partial r_{u_a}^i}{\partial y_{u_a}} = \frac{y_{u_a} - y^i}{r_{u_a}^i};$$

$$n_{u_a}^i = \frac{\partial r_{u_a}^i}{\partial z_{u_a}} = \frac{z_{u_a} - z^i}{r_{u_a}^i}.$$

故

$$r_u^i = r_{u_a}^i + l_{u_a}^i \delta x + m_{u_a}^i \delta y + n_{u_a}^i \delta z \quad (9)$$

基准站 r 和移动站 u 处惯导的位置输出对卫星 i 作单差得：

$$r_r^i - r_u^i = r_r^i - r_{u_a}^i - l_{u_a}^i \delta x - m_{u_a}^i \delta y - n_{u_a}^i \delta z \quad (10)$$

化简得：

$$\Delta r_{ru_a}^i = l_{u_a}^i \delta x + m_{u_a}^i \delta y + n_{u_a}^i \delta z \quad (11)$$

基准站 r 处的伪距测量值：

$$\rho_r^i = r_r^i + c(\delta t_r - \delta t^i) + I_r^i + T_r^i + \varepsilon_r^i \quad (12)$$

移动站 u 处的伪距测量值：

$$\rho_u^i = r_u^i + c(\delta t_u - \delta t^i) + I_u^i + T_u^i + \varepsilon_u^i \quad (13)$$

其中： r_r^i 、 r_u^i 分别是基准站、移动站到卫星的距离； δt_r 、 δt_u 是接收钟差； δt^i 是卫星钟差； I_r^i 、 I_u^i 是电离层延时； T_r^i 、 T_u^i 是对流层延时； ε_r^i 、 ε_u^i 是误差。

为了消除误差，基准站和移动站对卫星 i 、 j 做双差可得：

$$\nabla\Delta\rho_{ur}^{ij} - \nabla\Delta r_{u_ar}^{ij} = \nabla\Delta l_{u_a}^{ij}\delta x + \nabla\Delta m_{u_a}^{ij}\delta y + \nabla\Delta n_{u_a}^{ij}\delta z \quad (14)$$

其中：

$$\begin{aligned} \nabla\Delta\rho_{ur}^{ij} &= (\rho_u^i - \rho_u^j) - (\rho_r^i - \rho_r^j); \\ \nabla\Delta r_{u_ar}^{ij} &= (r_{u_a}^i - r_r^i) - (r_{u_a}^j - r_r^j); \\ \nabla\Delta l_{u_a}^{ij} &= l_{u_a}^i - l_{u_a}^j; \\ \nabla\Delta m_{u_a}^{ij} &= m_{u_a}^i - m_{u_a}^j; \\ \nabla\Delta n_{u_a}^{ij} &= n_{u_a}^i - n_{u_a}^j. \end{aligned}$$

同理，可得载波相位双差测量值为：

$$\nabla\Delta\phi_{ur}^{ij} - \nabla\Delta r_{u_ar}^{ij} = \nabla\Delta l_{u_a}^{ij}\delta x + \nabla\Delta m_{u_a}^{ij}\delta y + \nabla\Delta n_{u_a}^{ij}\delta z + \lambda\nabla\Delta N^{ij} \quad (15)$$

其中： λ 为载波波长； $\nabla\Delta N$ 为双差整周模糊度。

联立式 (11)、(14)、(15) 可得：

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_{u_a}^i &= l_{u_a}^i\delta x + m_{u_a}^i\delta y + n_{u_a}^i\delta z \\ \nabla\Delta\rho_{ur}^{ij} - \nabla\Delta r_{u_ar}^{ij} &= \nabla\Delta l_{u_a}^{ij}\delta x + \nabla\Delta m_{u_a}^{ij}\delta y + \nabla\Delta n_{u_a}^{ij}\delta z \\ \nabla\Delta\phi_{ur}^{ij} - \nabla\Delta r_{u_ar}^{ij} &= \nabla\Delta l_{u_a}^{ij}\delta x + \nabla\Delta m_{u_a}^{ij}\delta y + \nabla\Delta n_{u_a}^{ij}\delta z + \lambda\nabla\Delta N^{ij} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

因此，观测方程可写为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V} \quad (17)$$

其中：

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \Delta r_{u_a}^i \\ \nabla\Delta\rho_{ur}^{ij} - \nabla\Delta r_{u_ar}^{ij} \\ \nabla\Delta\phi_{ur}^{ij} - \nabla\Delta r_{u_ar}^{ij} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} l_{u_a}^i & m_{u_a}^i & n_{u_a}^i & 0 \\ \nabla\Delta l_{u_a}^{ij} & \nabla\Delta m_{u_a}^{ij} & \nabla\Delta n_{u_a}^{ij} & 0 \\ \nabla\Delta l_{u_a}^{ij} & \nabla\Delta m_{u_a}^{ij} & \nabla\Delta n_{u_a}^{ij} & \lambda \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \nabla\Delta N^{ij} \end{bmatrix}.$$

其中 V_k 是量测噪声。

采用加权最小二乘估计，权值的选取与测量值

的精度有关，可用观测值的协方差阵进行表示：

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{ins} & 0 & 0 \\ 0 & Q_p & 0 \\ 0 & 0 & Q_\phi \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中： Q_{ins} 是组合系统计算伪距单差观测值的协方差阵； Q_p 是双差载波伪距观测值的协方差阵； Q_ϕ 是双差载波相位观测值的协方差阵。

利用加权最小二乘原理可得：

$$\begin{bmatrix} \delta r \\ \nabla\Delta N \end{bmatrix} = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{\delta r} & Q_{\delta r, \nabla\Delta N} \\ Q_{\nabla\Delta N, \delta r} & Q_{\nabla\Delta N} \end{bmatrix} = (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (20)$$

从中即可得到模糊度浮点解及其协方差阵，再用 LAMBDA 算法即可解算出模糊度固定解。与没有 INS 辅助相比，此处求得的浮点解精度更高，协方差更小，具体分析如下。

2.2 抗病态分析

对于求解整周模糊度来说，病态性表现为模糊度之间相关性强、复共线性严重，将导致模糊度浮点解精度差，使得经过 LAMBDA 算法求解出的整周模糊度无法通过 Ratio 检验而遭到弃用，最终影响整周模糊度快速固定。加入惯性辅助信息可以改善病态性，分析如下：

为了得到整周模糊度浮点解的协方差阵，将式 (20) 展开如下：

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H})^{-1} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \\ B & C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{ins}^{-1} & & \\ & Q_p^{-1} & \\ & & Q_\phi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 0 \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} A^T Q_{ins}^{-1} A + B^T Q_p^{-1} B + B^T Q_\phi^{-1} B & B^T Q_\phi^{-1} C \\ C Q_\phi^{-1} B & C Q_\phi^{-1} C \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

所以

$$\begin{bmatrix} Q_{\delta r} & Q_{\delta r, \nabla\Delta N} \\ Q_{\nabla\Delta N, \delta r} & Q_{\nabla\Delta N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T Q_{ins}^{-1} A + B^T Q_p^{-1} B + B^T Q_\phi^{-1} B & B^T Q_\phi^{-1} C \\ C Q_\phi^{-1} B & C Q_\phi^{-1} C \end{bmatrix}^{-1} \quad (22)$$

因此

$$Q_{\nabla\Delta N} = \left[C Q_\phi^{-1} C - C Q_\phi^{-1} B (A^T Q_{ins}^{-1} A + B^T Q_p^{-1} B + B^T Q_\phi^{-1} B)^{-1} B^T Q_\phi^{-1} C \right]^{-1} \quad (23)$$

当没有加入惯性信息时，

$$Q_{\nabla\Delta N}^* = \left[C Q_\phi^{-1} C - C Q_\phi^{-1} B (B^T Q_p^{-1} B + B^T Q_\phi^{-1} B)^{-1} B^T Q_\phi^{-1} C \right]^{-1} \quad (24)$$

为了简化书写，没有加入惯性辅助信息时的双差整周模糊度估计值记为 \hat{N}^* ，加入惯性辅助信息后的双差整周模糊度估计值记为 \hat{N} 。

估计 \hat{N} 的均方误差^[16]为

$$\text{MSE}(\hat{N}) = E(\|\hat{N} - N\|^2) = E((\hat{N} - N)^T (\hat{N} - N)) \quad (25)$$

式 (25) 又可表达为

$$\text{MSE}(\hat{N}) = \text{tr}(\text{Cov}(\hat{N})) + \|E(\hat{N}) - N\|^2 = u_1 + u_2 \quad (26)$$

若记 $\hat{N} = (\hat{N}_1, \hat{N}_2, \dots, \hat{N}_n)^T$ ，则：

$$u_1 = \text{tr}(\text{Cov}(\hat{N})) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(\hat{N}_i)；$$

$$u_2 = \|E(\hat{N}) - N\|^2 = \sum_{i=1}^n (E(\hat{N}_i) - N_i)^2。$$

因为最小二乘是无偏估计，所以 $u_2 = 0$ 。

$$\text{MSE}(\hat{N}) = u_1 = \sigma_0^2 \mathbf{H}^{-1} = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \quad (27)$$

式中： σ_0^2 为单位权方差阵； \mathbf{H} 为法矩阵； λ_i 为法矩阵的特征值。

由式 (23)、式 (24)，可知

$$\text{MSE}(\hat{N}) < \text{MSE}(\hat{N}^*) \quad (28)$$

病态性诊断的方法有条件数法、特征值分析法、方差扩大因子法和行列式判别法等，为了便于从估计精度的角度进行分析，选用方差扩大因子法诊断病态性。

方差扩大因子定义^[16]为

$$\text{VIF}_i = (1 - R_i^2)^{-1} \quad (29)$$

式中 R_i^2 是以参数 N_i 为因变量时对其他参数的复相关系数。

又因为

$$\text{VIF}_i = \sum_{i=1}^n v_i^2 / \delta_i \quad (30)$$

式中： $\delta_i = \sqrt{\lambda_i}$ ； v_i 是观测矩阵进行奇异值分解中产生的元素。

通常取最大的 VIF_i 作为测量存在复共线性的指标。根据式 (28)，有

$$\text{VIF} < \text{VIF}^* \quad (31)$$

所以

$$R^2 < R^{2*} \quad (32)$$

复相关系数 $R_i^2 (0 \leq R_i^2 \leq 1)$ 度量了参数间的线性相关程度，线性相关程度越高，参数间的复共线性越严重，病态性越严重。可见加入惯性辅助之后

减小了方差扩大因子和复相关系数，改善了病态性。

3 实验验证

为验证 INS 辅助信息对模型病态、浮点解精度以及整周模糊度固定时间的影响，使用 Novatel 接收机的实测数据与 0.8 nm/h(50% CEP)的仿真惯导进行组合实验。其中 Novatel 接收机的采样间隔为 1 s，共采集 157 个历元，整个过程中参与解算的卫星为 [12 14 15 18 20 21 22 24 25]，其中 18 号星为基准星。准确的整周模糊度值为 [78 -77 1 2 3 35 16 -36]。

在数据处理过程中，可选择最小二乘和递推最小二乘 2 种模式。选择最小二乘模式时，每一个历元的解算与前后历元无关，用于分析 INS 辅助对单次模糊度解算时模型病态、浮点解精度的影响；选择递推最小二乘时，用于分析 INS 辅助对整周模糊度固定时间的影响。

3.1 复共线性及病态性分析

图 3 所示为复相关系数图。复相关系数 $R_i^2 (0 \leq R_i^2 \leq 1)$ 度量了参数间的线性相关程度。没有 INS 辅助时接近 1，有 INS 辅助时接近 0，说明 INS 辅助信息可以减少参数间的复共线性。

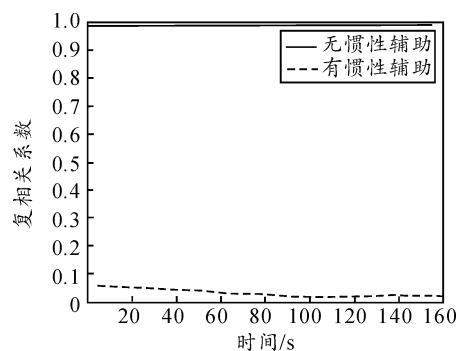


图 3 复相关系数

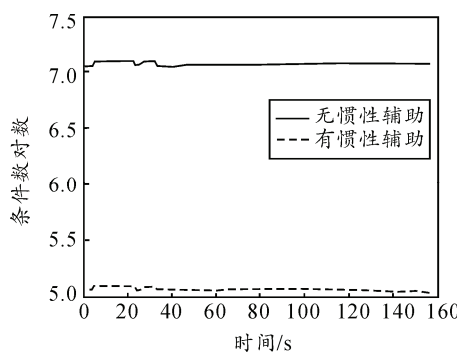


图 4 条件数对数

图 4 所示为条件数对数图。条件数是表征法矩阵病态性的指标，条件数越大说明病态性越严重。

通过加入 INS 辅助信息，条件数从 10^7 下降到 10^5 ，减少了 2 个数量级。这表明法矩阵奇异值之间差距减小，法矩阵的病态性得到改善。

3.2 浮点解精度分析

图 5 为整周模糊度浮点解的误差。没有 INS 辅助时，误差从 -7~5 周变化；加入 INS 辅助时，误差从 -0.5~1.5 周变化，浮点解误差减小。

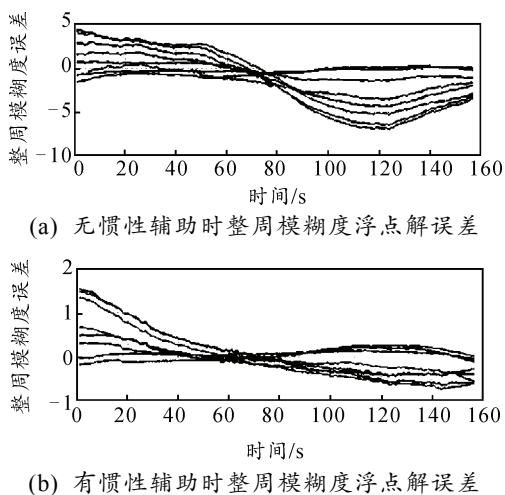


图 5 整周模糊度浮点解误差

引入模糊度浮点解精度及可靠性的评价指标：模糊度衰减因子 (ambiguity dilution of precision, ADOP)，其定义^[12]如下：

$$ADOP = (\det Q_N)^{\frac{1}{2n}} (\text{cycle})。$$

式中： Q_N 是模糊度浮点解的协方差阵； $\det Q_N$ 表示其行列式； n 为模糊度的个数；ADOP 的单位为周，ADOP 越小说明浮点解的精度越高。

由图 6 可知：加入 INS 辅助信息后，ADOP 从 0.43 周下降到 0.19 周，下降了 55.81%。说明浮点解的精度获得较大改善。

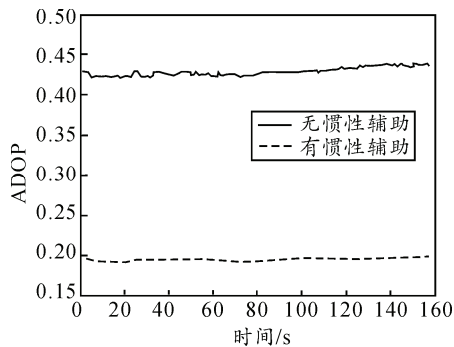


图 6 ADOP

3.3 整周模糊度固定时间分析

图 7 为 GPS 载波相位差分相对定位图。当整周

模糊度的固定解不能通过 Ratio 检验时，使用浮点解；当整周模糊度的固定解可以通过 Ratio 检验时则使用固定解。对比图 7(a)和图 7(b)可知：当没有惯性辅助时，固定整周模糊度用时 57 s；当加入辅助信息后，固定整周模糊度用时 14 s，时间缩短 75.44%。说明加入 INS 辅助信息后可以实现整周模糊度快速求解。

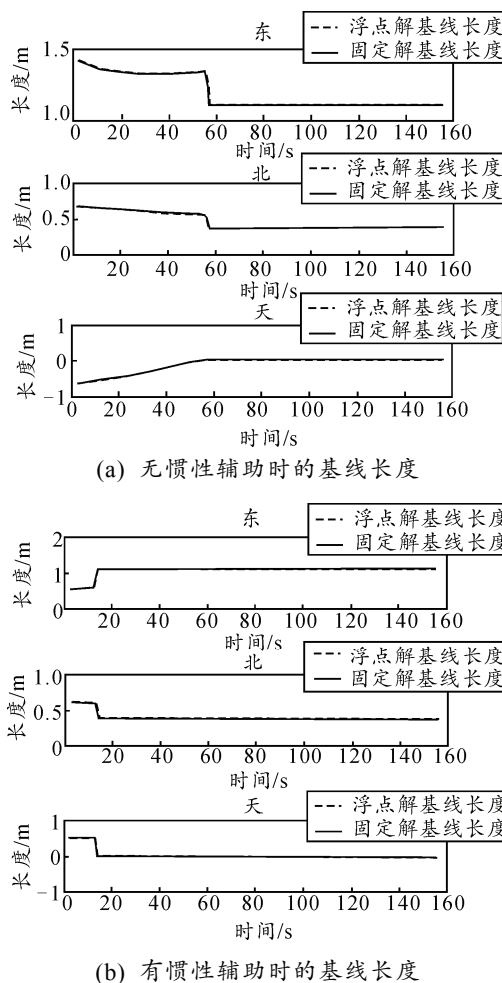


图 7 GPS 载波相位差分相对定位图

4 结论

笔者从导致病态的原因入手，通过将惯性伪距单差、GPS 伪距双差、GPS 载波相位双差联立求解，改善观测模型的复共线性和病态性，进而得到高精度的浮点解和协方差阵。最后利用 GPS 实测数据和仿真惯导数据进行仿真验证，对比了有无惯性辅助下模型复共线性、病态性，浮点解精度以及求解整周模糊度固定解所需要的时间。分析结果表明：INS 辅助可以改善模型复共线性及病态性，提高浮点解精度，实现整周模糊度的快速求解。