

doi: 10.7690/bgzdh.2018.10.018

离散探测点序列的最优化计算

陈长康¹, 陈建勇², 周家新¹

(1. 海军航空大学研究生管理大队, 山东 烟台 264001;

2. 海军航空大学电子信息工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 针对离散时间探测随机运动目标这类问题, 设计一种新的最优探测点序列逼近算法。在搜索状态建模和求解一阶搜索状态方程特征迹线解的基础上, 建立对随机运动进行离散时间探测的发现概率最优控制模型, 结合动态规划原理, 实现该算法步骤。在满足 1 阶搜索状态方程的随机恒速目标条件以及有限指数探测函数条件下, 将算法应用到算例。结果表明: 当随机恒速运动目标初始位置和速度均服从圆正态分布时, 该算法能由任意给定的初始探测点序列优化收敛, 满足精度要求的最大发现概率的最优探测点序列。

关键词: 最优搜索; 离散时间; 探测点; 最优化; 运动目标; 动态规划

中图分类号: TP20 **文献标志码:** A

Optimization Calculation of Discrete Detection Point Sequences

Chen Changkang¹, Chen Jianyong², Zhou Jiixin¹

(1. *Administrant Brigade of Postgraduate, Navay Aeronautical University, Yantai 264001, China;*

2. *Department of Electronic & Information Engineering, Navay Aeronautical University, Yantai 264001, China*)

Abstract: Aiming at the problem of discrete-time random moving target detection, a new algorithm for optimal detection point sequence approximation is designed. On the basis of search state model and solving the characteristic trace solution of the first order search state equation, the optimal control model of the probability to find a random motion target with discrete time detection is established, combined with the dynamic programming principle, the algorithm steps are implemented. The algorithm is applied to the example under the condition of satisfying of the first order search equation of the random constant speed target condition and the finite exponential detection function, the simulation result shows that when the initial location and velocity of the random constant velocity target obey the circular normal distribution, the algorithm can be optimally converged by any given initial detection point sequence to the optimal detection point sequence with the maximum detection probability of satisfying the accuracy requirement.

Keywords: optimal search; discrete time; detection point; optimization; moving target; dynamic programming

0 引言

在最优搜索理论研究中, 对连续空间中的连续运动目标进行搜索, 一般考虑的是连续空间的连续搜索路径^[1-2]。假设在连续的搜索路径中, 仅在某些时间段上, 对探测器实施探测, 并且在探测过程中, 保持探测器位置不变, 这样, 搜索路径问题就变成探测点序列问题^[3]。直升机吊放声纳搜潜是一种对目标的搜索, 只能在离散时间上进行有效的探测问题^[4], 即探测点序列问题。文献[4]提出了依次探测的单次探测发现概率最大的最优搜索准则, 并在该准则下计算了离散时间点上有限探测域的最优搜索位置; 文献[5]研究了一种基于梯度的寻优算法求离散点搜索探测概率最大点的寻优问题; 文献[6]给出直升机搜潜初始探测点的选择原则, 考虑转向延迟影响, 进而提出多机联合搜索策略; 文献[7]针对提

高直升机吊放声纳等离散搜索力的搜索效率, 导出待搜目标服从均匀分布和正态分布时的离散搜索力的最优配置模型。

笔者针对离散时间探测随机运动目标这类问题, 在建立模型的基础上, 设计了一种新的最优探测点序列逼近算法。在满足一阶搜索状态方程的随机恒速目标条件下, 应用本文中的算法, 给出一个算例, 求得最大发现概率的探测点序列。

1 搜索状态方程及一阶方程的解

设 $t \in T = [0, T]$, 令目标空间 $X \subset R^n$, 搜索空间 $Y \subset R^m$ 。定义搜索路径函数 $Z: T \rightarrow Y$, 表示搜索者从 0 时刻搜索到 T 时刻所运动的轨迹, $z = Z(t)$, 表示 t 时刻搜索者所处的位置。

定义探测率函数 $b(x, t, z)$ 。

收稿日期: 2018-07-14; 修回日期: 2018-08-20

作者简介: 陈长康(1992—), 男, 福建人, 硕士研究生, 从事最优搜索理论研究。

定义搜索至 t 时刻未发现目标和目标位置的联合概率分布密度函数 $f(x, t, Z)$ 。

定义 t 时刻目标存在于 x 的条件下, 从 t 时刻搜索到 T 时刻未发现目标的概率, 即目标存活概率函数 $u(x, t, T, Z)$ 。

目标在 Δt 内的随机移动向量具有 2 阶矩的条件下, 有搜索状态方程^[3]:

$$\frac{\partial u(x, t, T, Z)}{\partial t} + \sum_i a_i(x, t) \frac{\partial u(x, t, T, Z)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t, T, Z)}{\partial x_i \partial x_j} = b(x, t, z)u(x, t, T, Z); \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(x, t, Z)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial [a_i(x, t)f(x, t, Z)]}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 [c_{ij}(x, t)f(x, t, Z)]}{\partial x_i \partial x_j} = -b(x, t, z)f(x, t, Z)。 \quad (2)$$

式中: i, j 为空间维度; $a(x, t)$ 为速度均值函数向量; $C(x, t)$ 为目标随机移动量 2 阶矩的时间导数矩阵。

如果 $C_{ij} = 0$, 则搜索状态方程化为 1 阶方程。设向量函数和梯度向量均为列向量, 1 阶搜索状态方程为:

$$\frac{\partial u(x, t, T, Z)}{\partial t} + [\nabla u(x, t, T, Z)]^T a(x, t) = b(x, t, z)u(x, t, T, Z); \quad (3)$$

$$\frac{\partial f(x, t, Z)}{\partial t} + \nabla [a(x, t)f(x, t, Z)] = -b(x, t, z)f(x, t, Z)。 \quad (4)$$

微分方程组 $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$ 给出了搜索方程在 $X \times T$ 空间的特征线族, 特征线在 X 空间的投影, 称为特征迹线。在特征线族上, 搜索状态方程(3)、(4)分别为:

$$\frac{du(x, t, T, Z)}{dt} = b(x, t, z)u(x, t, T, Z); \quad (5)$$

$$\frac{df(x, t, Z)}{dt} = -[b(x, t, z) + \nabla a(x, t)]f(x, t, Z)。 \quad (6)$$

只要各个特征迹线不相交, 那么, X 空间中的任意一个点就仅有一条特征迹线通过。应用终止条件 $u(x, T, T, Z) = 1$, 初始条件 $f(x, 0, Z) = \rho_0(x)$, 可以得到搜索方程在特征线上的解:

$$u(x, t, T, Z) = \exp\{-\int_t^T b[x(\tau), \tau, z(\tau)]d\tau\}; \quad (7)$$

$$f(x, t, Z) = \rho_0(x_0) \cdot \exp\{-\int_0^t [b(x(\tau), \tau, z(\tau)) + \nabla a(x(\tau), \tau)]d\tau\}。 \quad (8)$$

式(7)中: $x(\tau)$, $\tau \in [t, T]$ 是起点在 $x(t)$, 终点在 $x(T)$ 的特征线。式(8)中: $x(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ 是起点在 $x_0 = x(0)$, 终点在 $x(t)$ 的特征线。

如果在 $0 \sim t$ 时刻不进行探测, 即 $b = 0$, 式(8)中有:

$$f(x, t, Z) = \rho_0(x_0) \exp\{-\int_0^t \nabla a[x(\tau), \tau]d\tau\}。 \quad (9)$$

式(7)中有:

$$u(x, t, T, Z) = 1。 \quad (10)$$

按照联合概率分布密度函数 f 的定义, 设 $t \in [0, T]$ 的探测点序列 $Z = \{z_k\}$ 。按照 Z 搜索到 T 时刻, 发现目标的概率为:

$$\bar{P}_T(Z) = 1 - \int_X f(x, T, Z)dx = 1 - \int_X f(x, t, Z)u(x, t, T, Z)dx。 \quad (11)$$

2 探测点序列的最优控制模型

在第 1 节对搜索状态建模和 1 阶搜索状态方程的求解, 在给出发现概率模型的基础上, 建立了离散探测点序列的最优控制模型。

对于搜索总时间 T , 有已知的时间序列为:

$$0 = t_0 < T_0 < t_1 < T_1 < \dots < t_k < T_k < \dots < t_K < T_K = T。$$

设探测点 $Z(k)$ 为系统状态。令搜索者从 T_{k-1} 到 t_k 的平均转移速度为 $V(k) \in R^m$ 。系统状态方程为

$$Z(k) = Z(k-1) + V(k-1)(t_k - T_{k-1}), \quad Z(0) = z_0。$$

控制函数约束: $|V(k)| \leq V_m$ 。

$\bar{P}_T(Z)$ 表示初始时刻为 0, 初始状态为 $Z(0)$, 终止时刻为 T 的性能指标函数:

$$J[Z(0), 0] = \int_X f(x, T, Z, V)dx; \quad (12)$$

初始时刻为 t_k , 初始状态为 $Z(k)$, 终止时刻为 T 的性能指标函数为:

$$J[Z(k), t_k] = \int_{t_k}^T \int_X \frac{\partial f(x, t, Z, V)}{\partial t} dx dt = \sum_{j=k}^{K-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_X \frac{\partial f(x, t, Z, V)}{\partial t} dx dt + \int_{t_k}^{T_k} \int_X \frac{\partial f(x, t, Z, V)}{\partial t} dx dt。 \quad (13)$$

因为在 $t \in [T_j, t_{j+1}]$, 有 $b(x, t, z) = 0$, 从目标存活概率函数的定义^[3]可得:

$$J[Z(k), t_k] = \sum_{j=k}^K \int_{t_j}^{T_j} \int_X \frac{\partial f(x, t, Z, V)}{\partial t} dx dt。 \quad (14)$$

根据动态规划原理, 对于使 $J[Z(0), 0]$ 取极小的 Z^* 、 V^* , 必使以 $Z^*(k)$ 为初始状态的 $J[Z(k), t_k]$ 取

极小^[3]，即

$$J^*[Z(0), 0] = \min_{|V^{(j)}| \leq V_m} \left\{ \sum_{j=0}^K \int_{t_j}^{T_j} \int_X \frac{\partial f(x, t, Z, V)}{\partial t} dx dt \right\} =$$

$$\min_{|V^{(j)}| \leq V_m} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{T_j} \int_X \frac{\partial f(x, t, Z, V)}{\partial t} dx dt + J^*[Z(k), t_k] \right\}. \quad (15)$$

动态规划的基本递推方程为^[3]：

$$J^*[Z(k), t_k] = \min_{|V^{(k)}| \leq V_m} \left\{ \int_{t_k}^{T_k} \int_X \frac{\partial f(x, t, Z, V)}{\partial t} dx dt + J^*[Z(k) + V(k)(t_{k+1} - T_k), t_{k+1}] \right\}. \quad (16)$$

3 最优探测点序列的逼近算法

基于第 1 节对搜索状态建模和 1 阶搜索状态方程的求解并给出发现概率模型的基础上，建立第 2 节探测点序列的最优控制模型，结合最优控制模型和动态规划原理，给出一个最优探测点序列的逼近算法步骤和流程如图 1 所示。

1) 对于搜索总时间 T ，有已知的时间序列为： $0 = t_0 < T_0 < t_1 < T_1 < \dots < t_k < T_k < \dots < t_K < T_K = T$ ，并给定初始状态 $Z(0)$ ；

2) 给定初始搜索速度的向量序列 $\{V_0(k)\}$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, K-1$ ；

3) $n = 0$ ；

4) $k = K-1$ ；

5) 根据向量序列 $\{V_n(k)\}$ ，计算探测点序列：

$$Z_n(k) = Z_n(k-1) + V_n(k-1)(t_k - T_{k-1});$$

6) 求 k 时刻一阶搜索状态方程的特征迹线解 f_n, u_n ；

7) 若 $k = -1$ ，转到 11)；

8) 用最优化方法，求 $J[Z(k), t_k]$ 极小的 $V_n^*(k)$ ；

9) 用 $V_n^*(k)$ 更新序列 $\{V_n(k)\}$ ；

10) $k = k-1$ ，返回 6)；

11) 计算 $\bar{P}_T(Z_n, V_n)$ ，若满足精度：

$$| [1 - \bar{P}_T(Z_n, V_n)] - [1 - \bar{P}_T(Z_{n-1}, V_{n-1})] | \leq 0.1\% \text{ 要求,}$$

转到 13)；

12) $n = n+1$ ，返回 4)；

13) $V^* = \{V_n(k)\}$

$$Z^* = \{Z_n(k)\} \quad P_T^* = 1 - \bar{P}_T(Z_n, V_n);$$

14) 结束。

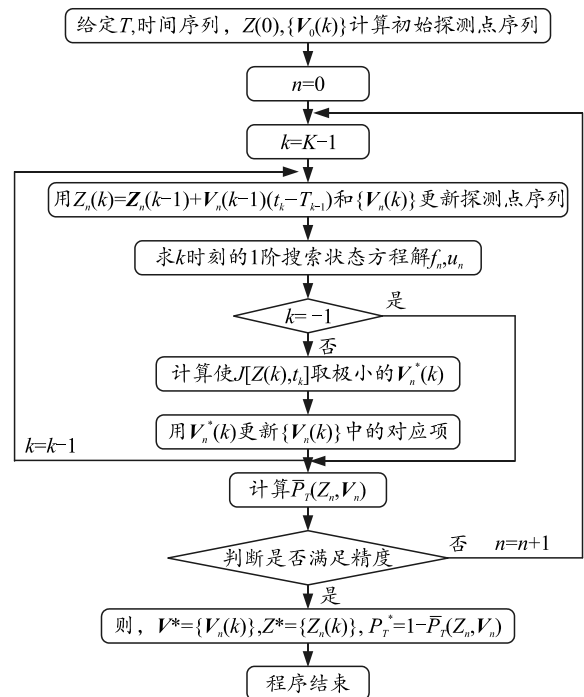


图 1 最优探测点序列的逼近算法流程

4 算例分析

4.1 目标模型

因为由已知信息对某时刻的目标定位存在误差，所以根据中心极限定理，可认为类似潜艇等随机运动目标的初始位置服从等方差的 2 维正态分布，即圆正态分布。

设初始时刻为 0，目标空间为 2 维空间，目标的初始位置分布服从圆正态分布

$$\rho[x(0)] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x(0) \cdot x(0)^T}{2\sigma^2}}. \quad (17)$$

设目标为随机恒速运动目标，其速度分布为圆正态分布

$$w(v) = \frac{1}{2\pi\mu^2} e^{-\frac{v \cdot v^T}{2\mu^2}}. \quad (18)$$

目标在 t 时刻速度的空间条件分布^[8]为

$$w(v/x, t) = \frac{\rho[x(t) - vt]w(v)}{\rho[x(t), t]}. \quad (19)$$

在 x 点的目标速度期望值及其散度^[8]为

$$\bar{v}(x) = \int_{R^2} vw(v/x, t) dv = \frac{\mu^2 t^2}{\sigma^2 + \mu^2 t^2} x; \quad (20)$$

$$\nabla v^T(x) = \frac{2\mu^2 t}{\sigma^2 + \mu^2 t^2}. \quad (21)$$

任意 $x(0)$ 点所在的特征线方程^[8]为

$$x(t) = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \mu^2 t^2}}{\sigma} x(0) \quad (22)$$

很容易证明, 随机恒速运动目标满足 1 阶搜索状态方程。

计算中取 $\sigma = 2 \text{ nm}$, $\mu = 8 \text{ kn}$ 。

4.2 探测模型

设搜索空间为 2 维空间, 根据文献[9]针对潜艇给出的探测模型, 令探测率函数为

$$b(x, t, z) = \begin{cases} \exp[-\alpha(|z-x|/R)^2] & 0 < |z-x| \leq R \text{ 且 } t \in [t_k, T_k] \\ 0 & |z-x| > R \text{ 或 } t \notin [t_k, T_k] \end{cases} \quad (23)$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots, K$, 取 $\alpha = 0.693$, $R = 3 \text{ nm}$ 。

在 $t \in [0, T]$, 有搜索状态方程(1)、(2)成立。对于 $t \in [t_k, T_k]$, 令 $Z(t) = Z(k) = z_k$, 表示探测期间搜索者保持静止。

设搜索速度 $|V| \leq 130 \text{ km/h}$, 目标和搜索空间计算范围为 $50 \text{ nm} \times 50 \text{ nm}$, 坐标原点设在计算区域的中点。

4.3 算例计算

设 $Z(0) = (-11, -11) \text{ nm}$, $T = 94 \text{ min}$, 每个探测点探测时间为 3 min, 探测点间隔时间为 10 min。

图 2 给出了探测起点, 任意给定的初始探测点序列, 经 15 次最优探测点序列的逼近计算, 得到满足精度要求的最优探测点序列及相应的发现概率。

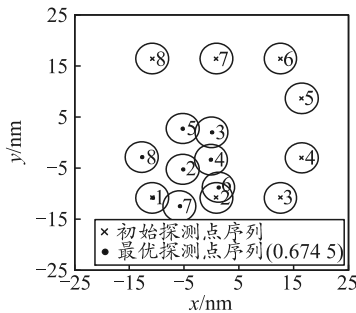


图 2 初始探测点序列和最优探测点序列

5 结束语

基于搜索状态函数 f , u 和搜索路径函数 Z 的发现概率模型, 是对发现概率的一种精确描述。笔者在对搜索状态建模和建立最优控制模型的基础上, 根据动态规划原理, 设计了一种最优探测点序列的逼近算法。算例结果表明: 该算法能够使得任意给定的初始探测点序列收敛到一个最优探测点序列上, 可为直升机吊放声纳搜潜等离散时间探测搜索目标问题提供参考。

参考文献:

- [1] 肖斌, 徐宏飞. 搜索力最优配置的求解与收敛性分析[J]. 火力与指挥控制, 1998, 23(4): 36-39.
- [2] 王景奇, 范奎武, 张最良. 机动目标对搜索的最优规避[J]. 军事系统工程, 2001, 11(1): 4-9.
- [3] 陈建勇. 单向最优搜索理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2016: 166-168.
- [4] 陈建勇, 王健, 单志超. 离散时间探测随机恒速目标的最优搜索算法[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(8): 1627-1630.
- [5] 张弛, 陈建勇. 有限探测区域最大概率探测点寻优算法[J]. 兵器装备工程学报, 2016, 37(4): 118-122.
- [6] 金惠明, 李建勋. 反潜直升机吊放声纳搜潜策略分析[J]. 电光与控制, 2011, 18(8): 26-28, 39.
- [7] 李长明. 离散搜索力的最优配置模型及增量搜索计划[J]. 火力与指挥控制, 2004, 29(5): 25-27.
- [8] 陈建勇, 张弛. 随机恒速运动目标的搜索方程及持续探测概率[J]. 海军航空工程学院学报, 2015, 30(6): 521-525.
- [9] ALIEXANDRIDIS M G. Mathematical formulation of the ASW decision model[M]. Cognitive simulation of Anti-submarine Warfare Commander's Tactical Decision Process. USA: American office of Navy Research, 1984: 55-59.