

doi: 10.7690/bgzdh.2018.12.002

## 捷联惯导寻北系统中内杆臂误差的分析与补偿

王磊<sup>1</sup>, 汪洲<sup>2</sup>, 任元<sup>2</sup>

(1. 航天工程大学研究生院, 北京 101416; 2. 航天工程大学航天装备系, 北京 101416)

**摘要:** 为解决高精度激光陀螺捷联惯导寻北系统中, 旋转调制对内杆臂效应误差起不到消除效果, 反而会将误差引入寻北导航解算中的问题, 提出具体的补偿方法。建模分析寻北过程中的内杆臂误差, 推导出内杆臂误差效应的数学表达式, 分析确定影响内杆臂误差的 2 个因素, 并通过实验进行仿真验证。结果表明: 内杆臂误差不会引起定位误差的发散; 内杆臂效应导航速度增量与旋转中心无关, 而与内杆臂长度、惯性测量单元 (inertial measuring unit, IMU) 的旋转角速度成正比。

**关键词:** 捷联惯导; 内杆臂效应; 旋转调制; 寻北

**中图分类号:** TP202 **文献标志码:** A

## Analysis and Compensation of Inner Arm Error in North-finder System of SINS

Wang Lei<sup>1</sup>, Wang Zhou<sup>2</sup>, Ren Yuan<sup>2</sup>

(1. College of Graduate, Aerospace Engineering University, Beijing 101416, China;

2. Department of Spaceflight Equipment, Aerospace Engineering University, Beijing 101416, China)

**Abstract:** In the high precision SINS north-find system, the rotary modulation can not get rid of the inner arm error and the error will introduce into north-find solution, put forward the compensation method. The error of the inner-arm is modeled and analyzed, and the mathematical expression of the error effect is deduced. 2 factors affecting the error of inner arm are analyzed and the test is carried out for simulation and verification. The results show that the inner arm error does not cause the divergence of the positioning error. The speed increment of the inner arm error navigation is independent of the rotation center, and is proportional to the length of the inner-arm and the rotational angular velocity of the inertial measurement unit (IMU).

**Keywords:** strapdown inertial navigation system (SINS); inner-arm error; rotational modulation; north-find

### 0 引言

常规捷联惯导寻北系统中, 利用转台带动 IMU 旋转进行寻北和导航解算, 根据传统的误差补偿方式, 常见的误差基本都能通过旋转调制解调掉<sup>[1]</sup>。在研究过程中, 应该将重点放在旋转调制解调不了的误差, 或者由于加入旋转装置以后新引入的误差等方面进行研究分析。

由于惯导系统机械结构及安装原因, IMU 中 3 个加速度计敏感质心不重合, 并且 3 个加速度计分别测量的是每个加速度计质心处沿其输入轴方向的比力, 在角运动过程中, 加速度计的误差势必会造成寻北导航解算误差, 一般将其称为内杆臂误差 (又称尺寸效应)<sup>[2]</sup>。笔者在研究过程中, 使用的陀螺仪为高精度激光陀螺, 由于光学的物理结构中不存在机械转子, 对加速度的变化不敏感, 所以光学陀螺的输出不受尺寸效应的影响, 不存在内杆臂误差。但在导航解算中, 由于加速度计的内杆臂误差效应

所带来的测量误差无法忽视, 会对寻北导航结果造成影响; 因此, 笔者对其内杆臂误差的进行分析与补偿。

### 1 内杆臂效应误差分析建模

如果将 IMU 看作刚体, 根据刚体理论, 在 IMU 运动过程中, 它上面每个点的角速度都相同, 所以理论上对于 IMU 中激光陀螺而言, 3 个陀螺的安装位置和方位可以随意, 只要 3 个陀螺敏感轴之间不存在相互平行的关系即可, 经过标定后都能实现 3 维角速度的测量。在应用中, 开始时一般将 3 个陀螺的 3 个敏感轴对应东北天坐标系的 3 个方向。对于加速度计来说, 由于 3 个加速度计物理尺寸和实际安装位置的限制, 使得它们测量的是 IMU 不同点方向的加速度, 如果不考虑这个因素, 将 3 个加速度计测量得到的加速度当作“点测量组件”的输出进行寻北以及导航解算, 那么将会引起导航误差<sup>[3]</sup>。在寻北解算中, 当仅仅依靠陀螺输出的角速度不能

收稿日期: 2018-09-01; 修回日期: 2018-10-07

基金项目: 国家自然科学基金(51475472, 61403396, 51605489); 国家 863 计划(2015AA7026083)

作者简介: 王磊(1992—), 男, 陕西人, 硕士研究生, 从事惯性导航技术研究。

够精确地解算出真北方向时,就必须利用加速度计输出的角加速度进行辅助寻北,如果存在较大的内杆臂误差,加速度计测量得到的角加速度会对寻北结果造成一定的误差,影响寻北结果;在惯导系统对准滤波器中,若采用速度作为观测量,如果 IMU 存在较大的内杆臂,在旋转调制的情形下,加上转位机构带动 IMU 不停的旋转,会对观测量带来较大的误差,影响对准精度<sup>[4]</sup>。

在惯性测量单元中,3 个加速度计分别安装在东北天坐标轴上的 3 个方向位置上,相对位置保持固定不变,并且 3 个加速度计的敏感轴的延长线相交于坐标系原点  $O$  点。具体安装位置如图 1 所示。

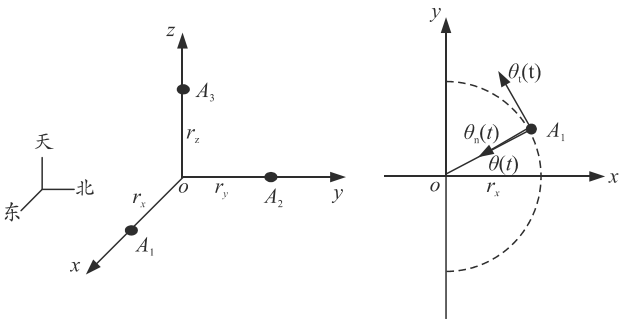


图 1 加速度计安装

由于 3 个加速度计两两垂直安装,分析过程中,以  $X$  轴方向上的加速度计为例,在寻北过程中使用旋转调制掉部分误差,假设 IMU 绕天向轴  $Z$  轴进行旋转时,在  $xy$  轴构成平面中,假设加速度计  $A$  与  $Ox$  的夹角  $\phi(t)$  为正弦角运动形式,即

$$\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

式中:  $\phi_0$  为定义振动幅值;  $\omega$  为旋转角速度; 振动周期为  $T = 2\pi / \omega$ 。

对上式求导可以得到旋转角速度:

$$\begin{aligned} v_n(t) &= 0, \\ a_n(t) &= r_A (\dot{\phi}(t))^2 = r_A \phi_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t), \\ v_t(t) &= r_A \dot{\phi}(t) = r_A \phi_0 \omega \cos(\omega t), \\ a_t(t) &= (v_t(t))' = -r_A \phi_0 \omega^2 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (2)$$

根据式(1)、式(2)可得加速度计  $A$  的法向速度、向心加速度、切向速度和切向加速度:

$$\begin{aligned} v_n(t) &= 0, \\ a_n(t) &= r_A (\dot{\phi}(t))^2 = r_A \phi_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t), \\ v_t(t) &= r_A \dot{\phi}(t) = r_A \phi_0 \omega \cos(\omega t), \\ a_t(t) &= (v_t(t))' = -r_A \phi_0 \omega^2 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

式中,对法向速度和切向速度沿着  $xyz$  坐标轴进行分解投影,得到速度分量:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{nx}(t) + v_{tx}(t) = 0 - v_t(t) \sin[\phi(t)] = \\ &= -r_A \phi_0 \omega \cos(\omega t) \sin[\phi_0 \cos(\omega t)], \\ v_y(t) &= v_{ny}(t) + v_{ty}(t) = 0 + v_t(t) \cos[\phi(t)] = \\ &= r_A \phi_0 \omega \cos(\omega t) \cos[\phi_0 \cos(\omega t)]. \end{aligned} \quad (4)$$

对式(3)切向加速度和法向加速度坐标轴向分解得加速度投影:

$$\begin{aligned} a_{nx}(t) &= -a_n(t) \cos[\phi(t)] = \\ &= -r_A \phi_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \cos[\phi_0 \sin(\omega t)], \\ a_{ny}(t) &= -a_t(t) \sin[\phi(t)] = \\ &= -r_A \phi_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \sin[\phi_0 \sin(\omega t)], \\ a_{tx}(t) &= -a_t(t) \sin[\phi(t)] = \\ &= r_A \phi_0 \omega^2 \cos(\omega t) \sin[\phi_0 \sin(\omega t)], \\ a_{ty}(t) &= a_n(t) \cos[\phi(t)] = \\ &= -r_A \phi_0 \omega^2 \cos(\omega t) \cos[\phi_0 \sin(\omega t)]. \end{aligned} \quad (5)$$

根据式(4)易知:  $v_x(0) = v_x(T) = 0$ ;  $v_y(0) = v_y(T) = r\phi_0\omega$ 。

对式(4)求导,可以得到以下关系:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{tx}(t) + v_{nx}(t), \\ v_y(t) &= v_{ty}(t) + v_{ny}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

定义函数:

$$\begin{aligned} f_1(x, t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} x \sin t \sin(x \sin t) dt, \\ f_2(x, t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} x \sin t \cos(x \sin t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

根据被积函数的对称性和周期性,可得:

$$\begin{aligned} f_1(x, 0, \pi/2) &= f_1(x, \pi/2, \pi) = \\ &= f_1(x, \pi, 3\pi/2) = \\ &= f_1(x, 3\pi/2, 2\pi), \\ f_2(x, 0, 2\pi) &= f_2(x, \pi/2, 3\pi/2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

在一个周期内,对沿坐标轴向的加速度积分,得到速度增量为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v_{tx}(T) &= \int_0^T a_{tx}(t) dt = 4r_A \omega f_1(\phi_0, 0, \pi/2) \\ \Delta v_{ty}(T) &= \int_0^T a_{ty}(t) dt = -f_2(\phi_0, 0, 2\pi) = 0 \\ \Delta v_{nx}(T) &= \int_0^T a_{nx}(t) dt = -4r_A \omega f_1(\phi_0, 0, \pi/2) \\ \Delta v_{ny}(T) &= \int_0^T a_{ny}(t) dt = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

## 2 内杆臂效应误差分析

在旋转过程中,假设 3 个加速度计为两两互相垂直安装,敏感轴相交于点  $o_b$ , 假设加速度计敏感轴交点与旋转轴原点不为同一点,即旋转轴与  $o_b z_b$

垂直，旋转角速度为  $\omega$ ，振动幅值为  $\phi_0$ 。xy 平面上加计的安装如图 2 所示。

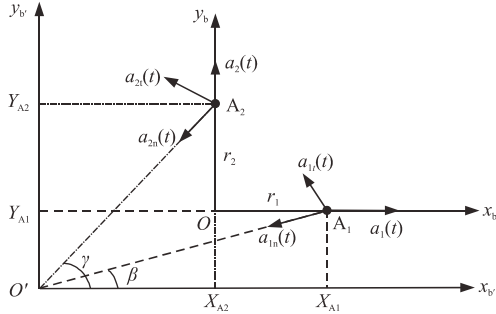


图 2 xy 平面上加计的安装

加速度计测量值为在某点处向心加速度和切向加速度在此加速度计敏感轴方向上的投影之和<sup>[5]</sup>。

旋转角振动在加速度计  $A_1$  处的向心加速度和切向加速度表示为：

$$\begin{aligned} a_{1n}(t) &= R\phi_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2, \\ a_{1t}(t) &= -R\phi_0^2\omega^2\sin(\omega t). \end{aligned} \quad (10)$$

则加速度计  $A_1$  的测量值为

$$\begin{aligned} a_1(t) &= -a_{1n}(t)\cos\beta - a_{1t}(t)\sin\beta = \\ &= -|O'X_{A_1}|\phi_0^2\omega^2\cos^2(\omega t) + \\ &= |O'Y_{A_1}|\phi_0^2\omega^2\sin(\omega t). \end{aligned} \quad (11)$$

加速度计  $A_2$  的测量值为

$$\begin{aligned} \Delta v_x(T) &= \int_0^T a_x(t)dt = \int_0^T [a_{A1nx}(t) + a_{A1tx}(t) + a_{A2nx}(t) + a_{A2tx}(t)]dt = \\ &= -4|O'X_{A_1}|\omega f_1(\phi_0, 0, \pi/2) + 4|O'X_{A_2}|\omega f_1(\phi_0, 0, \pi/2) = -4|X_{A_1}X_{A_2}|\omega f_1(\phi_0, 0, \pi/2), \\ \Delta v_y(T) &= \int_0^T a_y(t)dt = \int_0^T [a_{A1ny}(t) + a_{A1ty}(t) + a_{A2ny}(t) + a_{A2ty}(t)]dt = \\ &= 4|O'Y_{A_1}|\omega f_1(\phi_0, 0, \pi/2) - 4|O'Y_{A_2}|\omega f_1(\phi_0, 0, \pi/2) = -4|Y_{A_1}Y_{A_2}|\omega f_1(\phi_0, 0, \pi/2). \end{aligned} \quad (13)$$

由上式分析可得，在一个周期内，导航速度增量与旋转中心无关，即与原点无关。当振幅一定时，导航速度增量与加速度计质心与敏感轴延长线与原点的距离成正比，也与旋转角速度成正比<sup>[6]</sup>。在实际中，如果将加速度计当作点测量组件，将会从原理上带来导航速度增量与加速度计质心和敏感轴延长线的交点的距离成正比误差，形成解算误差，称  $r_1 = |Y_{A_1}Y_{A_2}|$  为内杆臂长度。

运用矢量分析法：如果不存在内杆臂误差，则  $P$  点加速度计

$$a_p = a_0. \quad (14)$$

实际情况，若存在内杆臂误差，则  $r_p \neq 0$ ，可

$$\begin{aligned} a_2(t) &= -a_{2n}(t)\sin\gamma + a_{2t}(t)\cos\gamma = \\ &= -|O'Y_{A_2}|\phi_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2 - \\ &= |OX_{A_2}|\phi_0^2\omega^2\sin(\omega t). \end{aligned} \quad (12)$$

在上式的求解中，可将  $A_1$ 、 $A_2$  两加速度计的测量值分解到  $o'_b x'_b y'_b$  坐标系  $x$ 、 $y$  坐标轴上，等效于坐标轴上虚拟切向加速度和法向加速度之和。即  $A_1$  的测量值为  $X_{A_1}$  和  $X_{A_2}$  处虚拟加速度计的合成， $A_2$  的测量值为  $Y_{A_1}$  和  $Y_{A_2}$  处的虚拟加速度计合成。

$Y_{A_1}$  测量的为虚拟切向加速度

$$a_{A1t}(t) = |O'Y_{A_1}|\phi_0^2\omega^2\sin(\omega t).$$

$X_{A_1}$  测量的为虚拟法向加速度

$$a_{A1n}(t) = -|O'X_{A_1}|\phi_0^2\omega^2\cos^2(\omega t).$$

$Y_{A_2}$  测量的为虚拟切向加速度

$$a_{A2t}(t) = -|O'X_{A_2}|\phi_0^2\omega^2\sin(\omega t).$$

$X_{A_2}$  测量的为虚拟法向加速度

$$a_{A2n}(t) = -|O'Y_{A_2}|\phi_0^2\omega^2\cos^2(\omega t).$$

参考上述分析的推导，将虚拟切向加速度和虚拟法向加速度沿固定坐标系  $oxyz$  的各轴向投影，并在一个积分周期内积分求和，可以得到轴向导航速度增量为：

求得  $P$  点处的加速度为

$$a_p = a_0 + \dot{\omega} \times r_p + \omega(\omega \times r_p). \quad (15)$$

式中  $\omega \times r_p$  和  $\omega(\omega \times r_p)$  分别代表  $P$  点相对于  $O_b$  点的切向加速度和法向加速度。

内杆臂效应是指载体运动时加速度计检测到的由于相对理想位置的安装偏移引起的向心力和切向力<sup>[7]</sup>。由于 3 个加速度计的敏感轴延长线相交于一点，所以加速度计的内杆臂误差由  $\omega(\omega \times r_p)$  引入，假定加计的敏感轴坐标系和载体坐标系重合，由于加速度计只沿敏感轴方向上的加速度，则投影到各坐标轴上的加速度计相应的内杆臂误差可表示为：

$$a_e = [a_{ex} \ a_{ey} \ a_{ez}]^T; \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{ex} &= -(\omega_y^2 + \omega_s^2)r_x \\ a_{ey} &= -(\omega_x^2 + \omega_s^2)r_y \\ a_{ez} &= -(\omega_y^2 + \omega_x^2)r_s \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$a_{ex} = -\left\{ \omega^2 \theta_y^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 \theta_s^2 \sin^2 (\omega t + \varphi) \right\} r_x = -\frac{1}{2} \omega^2 (\theta_y^2 + \theta_s^2) r_x + \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \theta_y^2 \cos 2\omega t + \theta_s^2 \cos (2\omega t + 2\varphi) \right\} r_x \quad (18)$$

式中，尺寸效应引起了一个恒定的加速度零偏，大小为  $\omega^2(\theta_y^2 + \theta_s^2)r_x / 2$ ，当周期性运动的幅值为  $0.1^\circ$ ，频率为 50 Hz，则 10 cm 的位置偏移将会产生约  $1.5 \times 10^{-3}g$  的加速度零偏，因此在寻北过程中，加速度计尺寸效应带来的误差是不可避免的。

加速度计的测量输出可表示为：

$$a_p = a_0 - a_e = \begin{bmatrix} a_{0x} \\ a_{0y} \\ a_{0z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\omega_y^2 + \omega_s^2)r_x \\ (\omega_x^2 + \omega_s^2)r_y \\ (\omega_y^2 + \omega_x^2)r_s \end{bmatrix} \quad (19)$$

记矢量表示形式为：

$$a_0 = a_p - \omega(\omega \times r_p) \quad (20)$$

上式即为内杆臂误差的补偿形式，如果将 O 点看作加速度计的 outputs 点，则内杆臂误差将不存在，

尤其是当存在振荡运动时，振荡运动经过整流后，会产生恒定的加速度误差，当  $\omega_y = \omega \theta_y \sin \omega t$ ， $\omega_s = \omega \theta_s \sin(\omega t + \varphi)$ ，则

从原理上不会影响加计的测量结果。

当 3 个加速度计敏感轴的延长线不相交于一点时，尺寸效应误差必然会与角速度的导数值相关，产生切向加速度。笔者在对题设条件中，不考虑该情况，因为在目前的装配工艺中，基本已经能够达到这一要求，本研究中对此不做考虑。

### 3 内杆臂误差对单轴旋转寻北结果影响分析

笔者依托于实验室的单轴 IMU 转台，验证文中杆臂误差建模的准确性和误差补偿的有效性。采用单轴正反转停方案，假设只考虑旋转过程中的内杆臂效应所带来的误差，分析内杆臂效应对系统寻北精度的影响。实验装置如图 3 所示。



图 3 实验装置

试验流程如下：1) 初始对准工作模式，分为粗对准和精对准过程，粗对准和精对准方案采用文献 [6] 的方案，在方案中加入了内杆臂误差的补偿方案；2) 自主惯性导航模式，采集 IMU 的输出数据，在导航计算机中进行导航解算，分析加入补偿方案后误差调制结果的有效性。实验原理如图 4 所示。

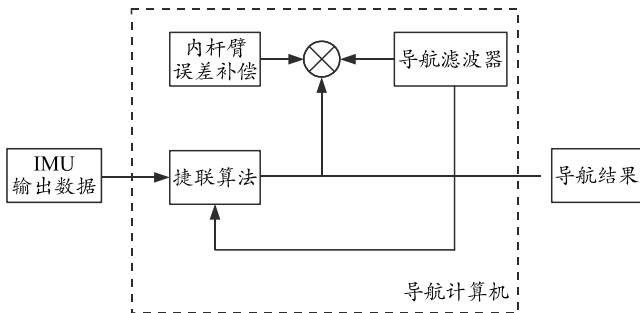


图 4 SINS 导航系统原理

实验过程中，保证转台在同一位置、姿态及方位进行多次导航实验，通过对导航结算的结果进行误差分析和数据处理，运用卡尔曼滤波算法进行误差的抑制，得到的结果如图 5 所示。

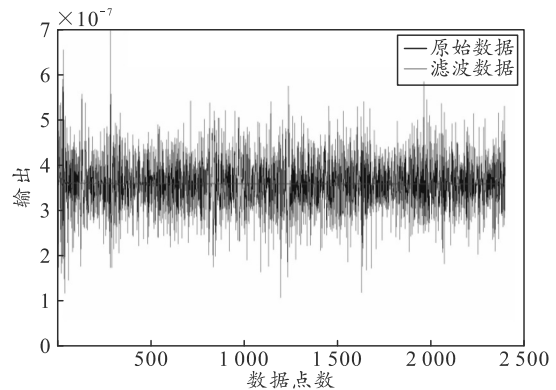


图 5 滤波抑制误差后的仿真结果

30(34): 42-49.

- [2] 廉小亲, 王信义, 朱小燕. 故障诊断系统中模糊推理算法的研究[J]. 北京理工大学学报, 1996, 16(1): 97-101.
- [3] 杨其宇, 张霞. 模糊 Petri 网故障诊断技术应用[J]. 兵工自动化, 2006, 25(4): 73-74.
- [4] 李厦. 基于 Petri 网的故障诊断技术研究及其在液压系

统中的应用[D]. 上海: 同济大学, 2006: 59-60.

- [5] CHEN S M. Weighted fuzzy reasoning using weighted fuzzy Petri nets[J]. IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering, 2002, 14(2): 386-397.
- [6] 朱国勇, 陈龙淼. 链式自动化弹仓的自适应模糊滑模控制[J]. 兵工自动化, 2017, 36(8): 1-4.

\*\*\*\*\*

(上接第 8 页)

由图可以看出：经过杆臂误差补偿后，输出数据的误差明显减小。在单轴旋转寻北过程中，转动装置的存在会增大尺寸效应误差，相当于引入了新的常值漂移，造成加速度计测得了一个额外的加速度信号，在长时间的旋转过程中，转动装置的存在可以实现误差的相互抵消，不会引起导航定位误差的发散。理论分析和仿真结果表明：加速度计尺寸误差不会引起定位误差的发散，但会增加无阻尼系统速度误差的振荡幅值<sup>[8]</sup>。

#### 4 结论

笔者主要研究了加速度计互相垂直安装的情况，详细推导了内杆臂误差效应的原理公式，分析了产生原因，得出研究分析结果：内杆臂效应导航速度增量与旋转中心无关，而与内杆臂长度、IMU 的旋转角速度成正比，并分析了内杆臂误差效应在惯导系统寻北过程中的影响。笔者仅对垂直安装情况进行分析与讨论，如果 3 个加速度计不垂直或者敏感轴延长线并不相交于一点时，这种情况下误差的分析和补偿讨论就比较复

杂，需要进一步深入分析。

#### 参考文献：

- [1] 袁保伦, 饶谷音. 光学陀螺旋转惯导系统原理探讨[J]. 国防科技大学学报, 2007, 28(6): 76-80.
- [2] DAVID H T, JOHN L W. 捷联惯性导航技术[M]. 张天光, 王秀萍, 王丽娜, 等, 译. 北京: 国防工业出版社, 2007: 36-126.
- [3] 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 捷联惯性测量组件中内杆臂效应分析与补偿[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(2): 148-153.
- [4] 陈永冰, 钟斌. 惯性导航原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007: 135-150.
- [5] 汪徐胜, 杨建业, 宋仔标, 等. 车载旋转调制捷联惯导系统最优对准技术[J]. 兵工自动化, 2017, 36(4): 10-17.
- [6] 于旭东, 王宇, 张鹏飞, 等. 单轴旋转对惯导系统误差特性的影响[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(6): 643-648.
- [7] 黄锡成. 高精度激光陀螺寻北技术研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
- [8] 杨其, 苏国华, 刘庆宝, 等. 纵向振动对捷联惯导误差影响半解析表达式研究[J]. 兵器装备工程学报, 2017(8): 14-16.