

doi: 10.7690/bgzdh.2018.12.008

# 基于微分几何的固定翼无人机过顶跟踪地面目标制导方法

夏卫政<sup>1</sup>, 徐进廷<sup>2</sup>, 黄坤<sup>1</sup>, 张民<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016; 2. 中国人民解放军 61886 部队, 北京 100089)

**摘要:** 为了实现无人机对地面目标的密切跟踪, 提出一种基于微分几何的无人机过顶跟踪地面目标的制导方法。通过搭建无人机过顶跟踪地面目标的数学模型, 分析其数学关系。设计无人机过顶跟踪地面目标的制导律并完成稳定性分析。最后, 分别针对不同运动状态的地面目标进行仿真验证。仿真结果表明: 该方法能实现对各类地面目标的有效跟踪, 并且具有良好的跟踪性能。

**关键词:** 无人机; 过顶跟踪; 制导方法; 微分几何; 稳定性证明

**中国分类号:** TP24 **文献标志码:** A

## Over-flight Tracking Guidance Method for Fixed Wing UAV Based on Differential Geometry

Xia Weizheng<sup>1</sup>, Xu Jinting<sup>2</sup>, Huang Kun<sup>1</sup>, Zhang Min<sup>1</sup>

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics &amp; Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. No. 61886 Unit of PLA, Beijing 100089, China)

**Abstract:** In order to achieve close tracking of ground targets by unmanned aerial vehicle (UAV), a guidance method based on differential geometry for UAV over-flight ground tracking is proposed in this paper. Firstly, the mathematical model of the UAV ground tracking target is built, and the mathematical relationship is analyzed. The guidance law of the UAV is designed to track the ground target, and the stability analysis is completed. Finally, the simulations are carried out for targets in different movement states respectively. The simulation results show that the method can effectively tracks all kinds of ground targets and has good tracking performance.

**Keywords:** UAV; over-flight tracking; guidance method; differential geometry; stability verification

### 0 引言

随着近年来科技水平的不断提高, 无人机的应用领域得到了极大扩展, 未来的应用前景极其广阔<sup>[1-2]</sup>。对地面移动目标进行自动跟踪是无人机的一个重要的应用方向<sup>[3-4]</sup>。一般来说, 无人机跟踪地面目标的方式分过顶跟踪<sup>[5-7]</sup>和定距跟踪<sup>[8-11]</sup>2种。当无人机跟踪威胁敏感地面目标时, 如军用无人机跟踪敌舰需保持一定的安全距离, 则采用定距跟踪的跟踪方式。当无人机跟踪安全可靠地接近地面目标时, 如民用无人机跟踪货轮需密切观察目标时, 则采用过顶跟踪的跟踪方式。

为了避免失速, 固定翼无人机必须保持一定的巡航速度。由于需要持续盘旋, 定距跟踪方式只适合于跟踪低速目标<sup>[11-12]</sup>。文献[11]指出, 采用定距跟踪方式, 地面目标运动速度不能超过无人机最大巡航速度的 30%。无人机以过顶跟踪方式跟踪快速运动的目标时, 不受地面目标运动速度的限制, 所以对无人机过顶跟踪地面目标制导

方法进行探讨十分重要。笔者假定地面目标的位置和运动方向可得, 可通过数据链方式传送给无人机制导系统。通过配备北斗或 GPS 接收机用于定位, 同时配备惯导、大气数据系统和激光测距仪等传感器, 可为无人机制导系统提供多种信息源。当目标保持静止时, 为了使无人机能够持续不断地穿越目标, 并将跟踪的对象拓展到运动的地面目标, 笔者设计一种基于微分几何的无人机过顶跟踪地面目标的新型制导方法。

### 1 问题描述

无人机飞行控制系统由内回路(稳定回路)和外回路(制导回路)构成。笔者认为内回路已经设计完成, 能够很好地响应外回路给出的制导指令, 并且在跟踪移动目标时默认无人机的速度高于目标速度。在理想情况下, 执行过顶跟踪任务的无人机应保持固定高度, 通常仅考虑固定高度上的 2 维制导问题。记  $r$  为无人机与目标的相对距离,  $v_u$  为无人机速度。

收稿日期: 2018-10-19; 修回日期: 2018-11-04

作者简介: 夏卫政(1992—), 男, 江苏人, 硕士, 从事无人机制导控制技术研究。

无人机采用过顶跟踪方式对地面目标进行自动跟踪, 并且保持恒定的巡航速度, 其在 Frient-Serret 坐标系<sup>[13-14]</sup>下的几何关系如图 1。

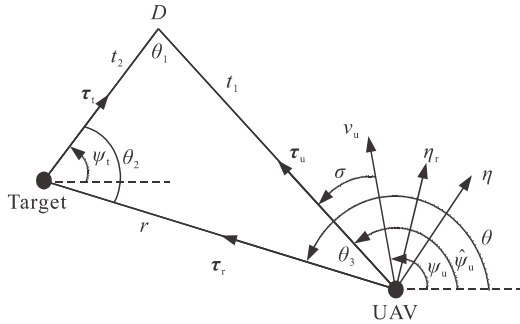


图 1 无人机过顶跟踪地面目标几何关系

考察由式(1)描述的无人机 2 维质点运动学模型<sup>[15-17]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_u \cos(\psi_u) \\ \dot{y} &= v_u \sin(\psi_u) \\ \dot{\psi}_u &= u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中:  $[x, y]^T$  为无人机位置;  $\psi_u$  为无人机航向角;  $u$  为控制输入。若以  $[x_t, y_t]^T$  为目标位置,  $\psi_t$  为地面目标航向角, 则有

$$r = \sqrt{(x - x_t)^2 + (y - y_t)^2} \quad (2)$$

图 1 中,  $\theta$  为视线角, 且定义逆时针为正。  $\tau_u$ 、  $\tau_t$  和  $\tau_r$  分别为无人机期望航向、目标运动方向以及无人机与目标连线方向上的单位速度矢量。此外,  $t_1$  为无人机与交汇点  $D$  间距离,  $\eta_r$  和  $\eta_u$  分别为对应于  $\tau_r$  和  $\tau_u$  的单位法向量。  $\sigma$  为无人机当前航向与过顶跟踪时期望航向间夹角, 定义  $\sigma = \hat{\psi}_u - \psi_u$  且  $\sigma \in (-\pi, \pi]$ 。目标的当前位置与采样时间  $\Delta t$  之后位置的距离为  $t_2$ 。  $\theta_3$  为  $t_1$  与  $r$  间的夹角, 则无人机速度  $v_u$  与目标连线  $r$  之间的夹角为  $\sigma + \theta_3$ 。

根据以上几何关系, 无人机跟踪地面目标的 2 维模型的极坐标形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= -v_u \cos(\sigma + \theta_3) + v_t \cos(\sigma + \theta_3 + \psi_u - \psi_t) \\ \dot{\sigma} &= -\dot{\psi}_u + \frac{v_u \sin(\sigma + \theta_3) - v_t \sin(\sigma + \theta_3 + \psi_u - \psi_t)}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

## 2 无人机过顶制导律设计

当跟踪地面目标时, 无人机有顺时针、逆时针 2 种飞行状态。为便于分析, 笔者仅采用顺时针飞行方式。逆时针方式可按同样的方法进行分析处理。

笔者提出如下无人机过顶跟踪地面目标制导律:

$$\dot{\psi}_u = (1 + \frac{v_t}{v_u}) \left| \dot{\theta} \right| \text{sign}(\sigma) - k_1 \sigma - k_2 \dot{\sigma} \quad (4)$$

$$\text{其中 } \text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \geq 0 \\ -1 & \sigma < 0 \end{cases}$$

## 3 无人机过顶制导律稳定性分析

**定理 1** 无人机动力学模型(3)在制导律(4)作用下, 若满足  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > -1$ , 则跟踪运动目标时的闭环系统渐近稳定。

证明:

因为  $\sigma = \hat{\psi}_u - \psi_u$ , 所有  $\dot{\sigma} = \dot{\hat{\psi}}_u - \dot{\psi}_u$ 。此外, 根据图 1 几何关系可知  $\theta_1 = \pi - \theta_2 - \theta_3 = \pi - \theta_2 - \theta + \hat{\psi}_u$ ;

又将  $\theta_2 = \pi + \psi_t - \theta$  代入上式可得  $\theta_1 = \hat{\psi}_u - \psi_t$ ;

两边求导可得  $\dot{\theta}_1 = \dot{\hat{\psi}}_u$ , 则

$$\dot{\sigma} = \dot{\theta}_1 - \dot{\psi}_u \quad (5)$$

图 1 中, 显然有如下等式关系成立:

$$\tau_r \cdot r = \tau_u \cdot t_1 - \tau_t \cdot t_2 \quad (6)$$

两边平方得  $r^2 = t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2 \tau_u \tau_t$ , 即  $r^2 = t_1^2 + t_2^2 - 2t_1 t_2 \cos \theta_1$ 。两边同除以  $t_1^2$  可得

$$\left(\frac{r}{t_1}\right)^2 = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 - 2\frac{t_2}{t_1} \cos \theta_1 + 1$$

由于  $\frac{r}{t_1} \geq 0$ , 解此方程得

$$\frac{r}{t_1} = \sqrt{\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 - 2\frac{t_2}{t_1} \cos \theta_1 + 1} \quad (7)$$

两边求导可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r}{t_1}\right) = \frac{(t_2/t_1) \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1}{r/t_1} = \frac{t_2 \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1}{r} \quad (8)$$

同时, 由式(6)可知  $\tau_u = \tau_r \cdot \frac{r}{t_1} + \tau_t \cdot \frac{t_2}{t_1}$ , 且采样时间  $\Delta t$  内目标速度和航向不变, 该式两边求导可得

$$\dot{\tau}_u = \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{t_1}\right) \tau_r + \frac{r}{t_1} \dot{\tau}_r = \dot{\psi}_u \cdot \eta$$

将式(8)代入上式得:

$$\frac{t_2 \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1}{r} \tau_r + \frac{r}{t_1} \dot{\tau}_r = \dot{\psi}_u \cdot \eta$$

由  $\dot{\tau}_r = \eta_r \cdot \dot{\theta}$  且  $\dot{\theta}_1 = \dot{\hat{\psi}}_u$ , 可得

$$\frac{t_2 \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1}{r} \tau_r + \frac{r}{t_1} \dot{\theta} \cdot \eta_r = \dot{\theta}_1 \cdot \eta$$

对上式两边同时平方, 则

$$\left(\frac{t_2}{r} \sin \theta_1\right)^2 \dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{r}{t_1}\right)^2 \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_1^2。$$

整理得

$$|\dot{\theta}_1| = \frac{r^2}{t_1(t_1 - t_2 \cos \theta_1)} |\dot{\theta}|。 \quad (9)$$

设定  $n = \frac{t_2}{t_1} = \frac{v_t}{v_u} < 1$ ，则

$$\frac{r^2}{t_1(t_1 - t_2 \cos \theta_1)} = \frac{r^2}{t_1^2} \frac{1}{1 - (t_2/t_1) \cos \theta_1} = 1 + \frac{n(n - \cos \theta_1)}{1 - n \cos \theta_1}。$$

令  $y = n - \cos \theta_1 - (1 - n \cos \theta_1)$ ，则  $y = (n - 1)(1 + \cos \theta_1)$ 。因为  $0 < n < 1$  且  $\cos \theta_1 \in (-1, 1)$ ，所以  $y = (n - 1)(1 + \cos \theta_1) < 0$ ，则  $n - \cos \theta_1 < 1 - n \cos \theta_1$ 。

即

$$\frac{r^2}{t_1(t_1 - t_2 \cos \theta_1)} = 1 + \frac{n(n - \cos \theta_1)}{1 - n \cos \theta_1} < 1 + n。 \quad (10)$$

由式(9)可得  $|\dot{\theta}_1| < (1 + n)|\dot{\theta}|$ ，即

$$|\dot{\theta}_1| < \left(1 + \frac{v_t}{v_u}\right) |\dot{\theta}|。 \quad (11)$$

选择李雅普诺夫函数  $L = \frac{1}{2} \sigma^2$ ，因此  $\dot{L} = \sigma \cdot \dot{\sigma}$ 。

由式(4)和式(5)可得

$$\dot{\sigma} = \left(1 + \frac{v_t}{v_u}\right) |\dot{\theta}| \text{sign}(\sigma) - k_1 \sigma - k_2 \dot{\sigma} = \dot{\theta}_1 - \dot{\sigma}，$$

则：

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{1 + k_2} (\dot{\theta}_1 - (1 + n) |\dot{\theta}| \text{sign}(\sigma) - k_1 \sigma)；$$

$$\dot{L} = \sigma \cdot \dot{\sigma} = \frac{\sigma}{1 + k_2} (\dot{\theta}_1 - (1 + n) |\dot{\theta}| \text{sign}(\sigma) - k_1 \sigma)。$$

再分为如下 2 种情况分析：

1)  $\sigma \geq 0$ 。

此时有

$$\dot{L} = \frac{\sigma}{1 + k_2} (\dot{\theta}_1 - (1 + n) |\dot{\theta}| - k_1 \sigma)。$$

根据式(10)可知  $\dot{\theta}_1 \leq (1 + n) |\dot{\theta}|$ ，则

$$\dot{L} \leq \frac{\sigma}{1 + k_2} (-k_1 \sigma)。$$

因为  $k_1 > 0$ ， $k_2 > -1$ ，则  $\dot{L} \leq 0$ 。

2)  $\sigma < 0$ 。

$$\dot{L} = \frac{\sigma}{1 + k_2} (\dot{\theta}_1 + (1 + n) |\dot{\theta}| - k_1 \sigma)。$$

根据式(10)可知  $\dot{\theta}_1 \geq -(1 + n) |\dot{\theta}|$ ，则

$$\dot{L} \leq \frac{\sigma}{1 + k_2} (-k_1 \sigma)。$$

因为  $k_1 > 0$ ， $k_2 > -1$ ，则  $\dot{L} \leq 0$ 。

综上所述，若满足  $k_1 > 0$ ， $k_2 > -1$ ，无人机跟踪运动地面目标时的闭环系统渐近稳定<sup>[18-19]</sup>。

#### 4 仿真实验

为了验证笔者提出的过顶跟踪制导律的合理性与有效性，分别对静止目标和运动目标的跟踪问题进行仿真实验。

制导增益设定为： $k_1 = 1$ ， $k_2 = 0.2$ 。

1) 静止目标。

无人机对静止目标跟踪的轨迹与相对距离分别如图 2、图 3 所示。

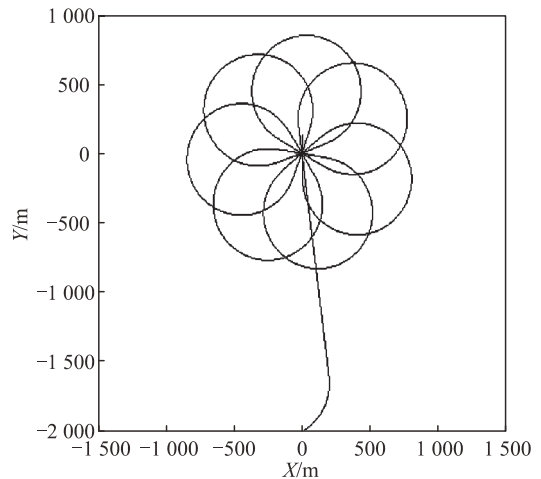


图 2 跟踪静止目标轨迹

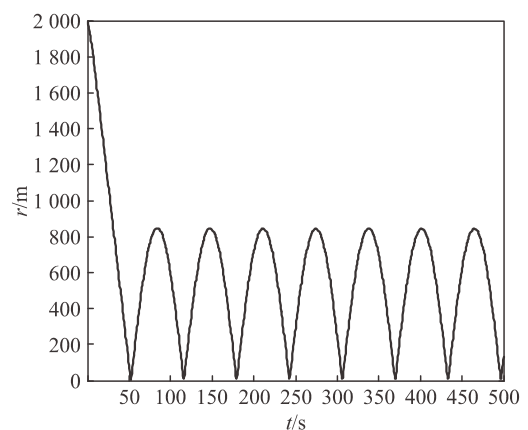


图 3 无人机与目标间的距离

2) 匀速运动目标。

设定无人机以 40 m/s 速度巡航跟踪 10 m/s 移动的地面目标，跟踪轨迹与相对距离分别如图 4、图 5 所示。

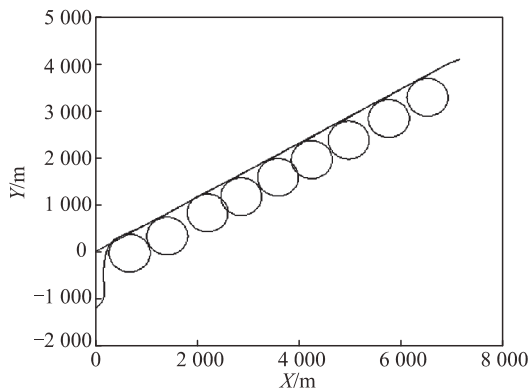


图 4 跟踪运动目标的轨迹

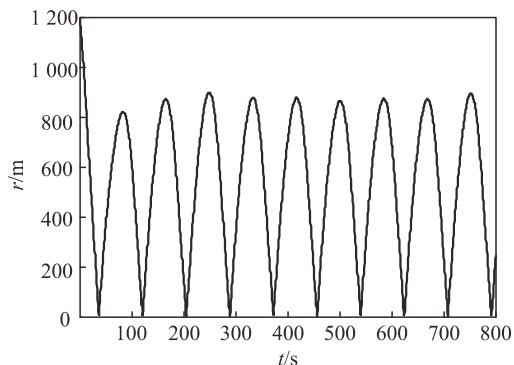


图 5 无人机与目标间的距离

3) 变速运动目标。

设定地面目标的速度剖面如图 6 所示，无人机对目标跟踪的速度、轨迹与相对距离分别如图 6—8 所示。

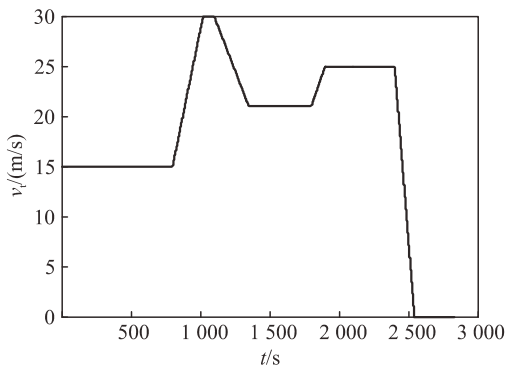


图 6 地面目标速度剖面

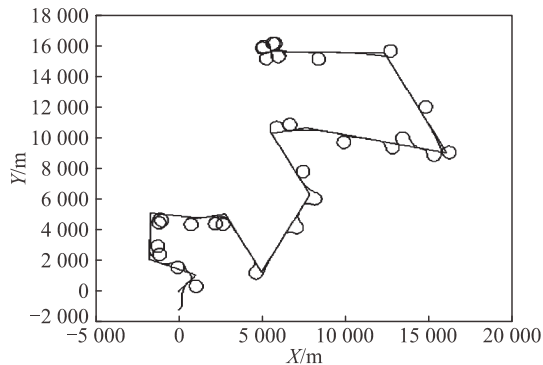


图 7 跟踪 Levy 运动目标的轨迹

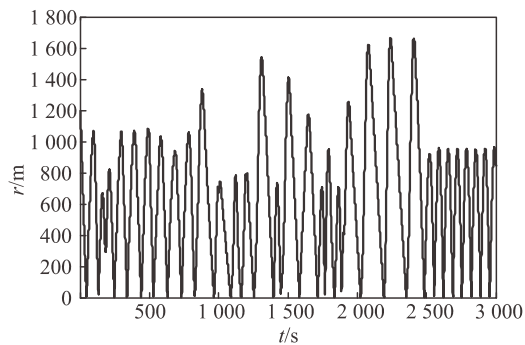


图 8 无人机与目标间的距离

从上述无人机对各类地面目标的过顶跟踪结果可以看出：笔者设计的无人机跟踪制导律能够很好地对包括高速运动目标在内的各类地面目标进行自动跟踪，同时满足最小转弯半径<sup>[20]</sup>及最大滚转角速率设计要求。

5 结论

笔者提出了一种用于无人机过顶跟踪地面目标的新制导方法。由于采用微分几何的方法设计无人机过顶跟踪制导律，突破了传统的设计思路，设计方法较为新颖。同时，笔者采用李雅普诺夫直接法对所提出制导律的稳定性进行了严格的数学证明。仿真结果表明：该制导策略可以很好地跟踪各类地面目标，具有工程应用价值。

参考文献：

- [1] 陈宗基, 魏金钟, 王英勋, 等. 无人机自主控制等级及其系统结构研究[J]. 航空学报, 2011, 32(6): 1075-1083.
- [2] RATHINAM S, ZU W K, SENGUPTA R. Vision-Based Monitoring of Locally Linear Structures Using an Unmanned Aerial Vehicle[J]. Journal of Infrastructure Systems, 2008, 14(1): 52-63.
- [3] NEX F, REMONDINO F. UAV for 3D mapping applications: a review[J]. Applied Geomatics, 2014, 6(1): 1-15.
- [4] JOHN T B. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization[J]. JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS, 1998, 21(2): 193-207.
- [5] NIKI R, MATTEO Z. Fixed-Wing UAV Guidance Law for Surface-Target Tracking and Overflight[J]. Aerospace Conference, Big Sky, MT, USA: IEEE, 2012, 1(11): 3-10.
- [6] REGINA N, ZANZI M. 2D tracking and over-flight of a target by means of a non-linear guidance law for UAV[C]. IEEE Aerospace Conference. IEEE, 2009: 1-11.
- [7] YAMASAKI T, BALAKRISHNAN S N. Sliding mode based pure pursuit guidance for UAV rendezvous and chase with a cooperative aircraft[C]. American Control Conference, Baltimore, MD, USA: IEEE, 2010: 5544-5549.

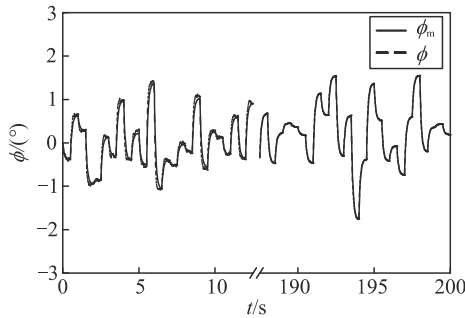


图 5 不确定模型  $A + \Delta A$  滚转角跟随曲线

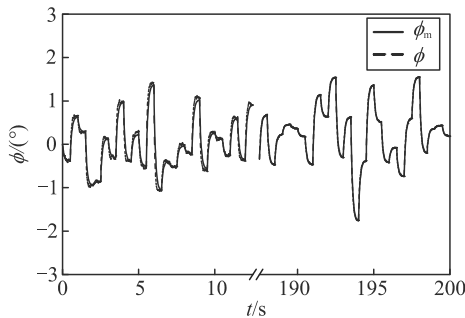


图 6 不确定模型  $A - \Delta A$  滚转角跟随曲线

### 5 结论

鲁棒控制是处理系统存在不确定性或外部扰动时的有效控制方法。针对模型建立不确定性等问题，笔者提出一种鲁棒保性能控制器设计方法，确保了

\*\*\*\*\*

(上接第 33 页)

[8] PARK S. Guidance Law for Standoff Tracking of a Moving Object[C]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017: 2948-2955.

[9] FREW E W, LAWRENCE D A, STEVE M. Coordinated standoff tracking of moving targets using Lyapunov guidance vector fields[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2008, 31(2): 290-306.

[10] Matveev A S, TEIMOORI, H, SAVKIN A V. The problem of target following based on range-only measurements for car-like robots[C]. IEEE conference on decision and control and Chinese control conference, China: Shanghai, 2009: 8537-8542.

[11] ZHANG M, LIU H H T. Cooperative tracking a moving target using multiple fixed-wing UAVs[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2016, 81(3): 505-529.

[12] DEGHAT M, SHAMES I, ANDERSON B D O, et al. Localization and circumnavigation of a slowly moving target using bearing measurements[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2182-2188.

[13] SONG Z, LI H, CHEN C, et al. Coordinated standoff tracking of moving targets using differential geometry[J]. Journal of Zhejiang University Science C, 2014, 15(4): 284-292.

系统在基准点上具有良好的稳定鲁棒性和性能鲁棒性，实现了姿态响应的整体平滑、姿态跟随快速。最终的数字仿真结果说明了文中控制方法具有良好的控制效果。

### 参考文献:

[1] KEE S G. Guide for Conceptual Helicopter Design[D]. Monterey, CA: Naval Postgraduate School, 1983.

[2] 俞立. 鲁棒控制-线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 122-126.

[3] 高鹏飞, 郑云龙. 某型无人直升机飞行控制系统半实物仿真[J]. 兵工自动化, 2017, 36(6): 90-92.

[4] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 64-66.

[5] EL G L, FERON E, BALAKRISHNAN V. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 1994: 123-142.

[6] 戴华. 矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 153.

[7] 王宏强, 王道波, ASHFAQ A M, 等. 无人直升机鲁棒跟踪解耦飞行控制研究[J]. 机械科学与技术, 2009, 28(4): 536-541.

[8] 毛舒存, 肖余培. 混联结构无人直升机六自由度运动模拟平台设计[J]. 兵工自动化, 2017, 36(3): 45-50.

[14] BHARATHI K, NAGARAJ M. Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formula[J]. Indian J. Pure Appl. Math, 1987, 18(6): 507-511.

[15] 吴森堂, 费玉华. 飞行控制系统[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005: 46-64.

[16] LI Z, HOVAKIMYAN N, DOBROKHODOV V, et al. Vision-based Target Tracking and Motion Estimation Using a Small UAV[C]. 49th IEEE Conference on Decision and Control, USA: Atlanta, 2010: 2505-2510.

[17] DOBROKHODOV V, KAMINER I, JONES K, et al. Vision-based Tracking and Motion Estimation for Moving Targets Using Small UAVs[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, USA: Keystone, 2006: 1-12.

[18] SHEVITZ D, PADEN B. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems[J]. IEEE Transactions on automatic control, 1994, 39(9): 1910-1914.

[19] KHALIL H K. Nonlinear Systems [M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002: 111-174.

[20] CHANDLER P R, PACTHER M, RASMUSSEN S. UAV cooperative control[C]. American Control Conference. Proceedings of the 2001, Arlington, VA, USA: IEEE, 2001, 1: 50-55.