

doi: 10.7690/bgzdh.2019.05.018

基于有限元仿真的土壤压力沉陷模型建立与分析

冯文选¹, 马吉胜², 何健¹, 吴大林¹

(1. 陆军工程大学石家庄校区火炮工程系, 石家庄 050003; 2. 西京学院机械工程学院, 西安 710123)

摘要: 针对土壤本构模型的多样性, 利用有限元计算方法, 对土壤压力沉陷进行建模与分析。根据有限元计算方法在分析土壤力学中的应用, 通过对不同土壤力学参数下得到的压力沉陷结果进行拟合, 得出土壤压力沉陷特性曲线, 分析了土壤参数弹性模量、泊松比、内摩擦角和黏聚力对双指数模型参数的影响, 给出了一种土壤压力沉陷双指数模型。试验结果表明, 采用双指数模型对湿黏土压力沉陷关系进行拟合是可行的。该方法对研究土壤压力沉陷模型建立与分析具有参考价值。

关键词: 土壤; 压力沉陷; 有限元; 模型; 双指数

中图分类号: TP302 **文献标志码:** A

Establishment and Analysis of Soil Pressure Subsidence Model Based on Finite Element Simulation

Feng Wenxuan¹, Ma Jisheng², He Jian¹, Wu Dalin¹

(1. Department of Artillery Engineering, Shijiazhuang Campus of PLA University of Army Engineering, Shijiazhuang 050003, China; 2. Collage of Mechanical Engineering, Xijing University, Xi'an 710123, China)

Abstract: Based on the diversity of soil constitutive models, the finite element method was used to establish model and analyze soil pressure subsidence. According to the application of finite element calculation method in soil mechanics analysis, the pressure subsidence curves obtained under different soil mechanics parameters were fit to obtain the soil pressure subsidence characteristic curve, and the influence made by soil parameter elastic modulus, Poisson's ratio, internal friction angle and cohesion on double exponential model parameters were analyzed. Finally, a double exponential model of soil pressure subsidence is presented. The test results show that it is feasible to fit the pressure subsidence relationship of wet clay by double exponential model. This method has reference value for the study of the establishment and analysis of soil pressure subsidence model.

Keywords: soil; load-sinkage; finite element; model; double-exponential

0 引言

车辆地面力学是研究车辆与地面之间相互作用的一门学科, 对优化车辆行驶结构, 提高车辆的越野行驶能力至关重要。Bekker 在地面—车辆系统导论中将车辆与地面之间的力学作用分为垂直应力—应变关系和水平应力—应变关系^[1], 其中垂直应力—应变关系即土壤所受垂直压力与沉陷量之间的关系。从德国学者 Bernstein 建立车轮陷入地面深度与接地压力之间的关系开始, 各国学者均对土壤的压力沉陷关系进行了不同的研究。苏联学者 Goriatchkin 将 Bernstein 公式推广为指数形式。美国学者 bekker 在上述研究的基础上, 结合土木工程中地基下陷规律提出了 bekker 公式。bekker 公式将土壤内摩擦参数、黏聚参数和载荷板宽度考虑在内, 是土壤压力沉陷关系指数形式的代表公式, 并且得到了广泛应用^[2-4]。各国学者先后提出了许多其他函

数形式的土壤压力沉陷模型, 例如, 英国科学家 Reece^[5]的幂函数模型、俄国科学家库兹可夫的双曲正切模型和日本科学家的双曲线模型^[6-7]。俄罗斯学者 Modest Lyasko 在总结其他学者实验结果的基础上, 提出了参数与实验条件无关的 LSA 模型^[8]。

中国学者在土壤的承压沉陷特性方面也做了许多研究工作。吉林工业大学庄继德等以新疆沙漠沙为研究对象, 提出了描述沙土压力沉陷特性的模型^[9]。杨启梁等^[10]在研究水田载荷—下陷特性中, 采用形积当量作为反映测板形状、尺寸特征的参数, 推导出了水田土壤压力沉陷公式。南京农业大学姚艳等采用二项式对室内重塑土壤压力沉陷关系进行拟合, 得到了较高的拟合精度, 并进行了农田实测数据的验证^[11]。原机械工程学院赵家丰等结合土壤承载极限理论, 提出一种改进的土壤承载模型, 并利用不同土质实验参数进行验证, 取得较好的拟合

收稿日期: 2018-12-10; 修回日期: 2019-03-16

基金项目: 军内重点科研项目(404040602)

作者简介: 冯文选(1994—), 男, 河南人, 硕士, 从事车辆地面力学, 计算机仿真研究。

精度^[12]。

有限元计算方法在分析土壤力学中的应用日趋广泛，特别是在车辆与地面相互作用的分析中效果显著^[13-15]。笔者针对松软路面土壤进行研究，结合有限元分析建立了土壤压力沉陷拟合模型，利用公开文献实验数据进行验证，并对土壤弹性模量、泊松比、黏聚力等参数对拟合模型参数的影响进行研究。

1 有限元建模与对比分析

1.1 土壤本构关系与参数确定

土壤的应力—应变关系可以用固体力学中的弹塑性理论来描述。土壤的力学行为可以分为弹性行为和塑性行为。弹性行为是土壤在弹性变形范围内的应力—应变关系，可以用弹性本构模型来描述。弹性模型主要包含弹性模量 E 和泊松比 μ 2 个参数。常见的土壤弹性本构模型包括线弹性模型、多孔介质弹性模型和线粘弹性模型。笔者采用适用最广泛的各向同性弹性模型描述土壤的弹性行为。

土壤的塑性行为主要包括屈服、硬化、剪胀和流动性，可以用塑性本构模型来描述。经典的土壤塑性本构模型主要有 Mohr-Coulomb 模型、Drucker-Prager 模型和临界状态塑性模型^[16]。笔者采用广泛应用的 Mohr-Coulomb 模型描述土壤的塑性行为。Mohr-Coulomb 模型中的剪切屈服函数为

$$F = R_{mc}q - p \tan \varphi - c = 0. \quad (1)$$

其中： φ 为 $q-p$ 平面上的摩擦角； c 为黏聚力； R_{mc} 为屈服函数在 π 平面上的形状参数。

在 ABAQUS 软件中，为了避免 π 平面上屈服面存在尖角导致流动方向不唯一的现象，Mohr-Coulomb 模型采用非相关联的流动准则，并通过指定黏聚力 c 与等效塑性应变之间的关系，控制土壤的硬化规律。

土壤本构参数可以通过土工试验来确定。土体抗剪强度试验是测定土体剪切特性的试验的一种，分为室内试验和现场试验。室内试验包括直剪试验和三轴剪切试验，直剪试验仪器设备简单、操作方便、试验用土少，可以测量土壤的抗剪强度参数黏聚力 c 和内摩擦角 φ 。三轴压缩试验作为另一种常见的室内土工试验，与直剪试验相比，除了可以测定抗剪强度指标黏聚力 c 和内摩擦角 φ ，还可以测定土壤的弹性模量 E 、泊松比 μ 和压缩系数等参数^[17]。

采用上述 2 种土工试验对起伏路面松软土壤进行参数测定^[18]，在含水率 5% 的情况下，测得土壤

内摩擦角 $\varphi=27.33^\circ$ ，黏聚力 $c=6.38$ kPa。通过三轴压缩试验测得土壤弹性模量 $E=20.2$ MPa，泊松比 $\mu=0.32$ 。总密度为 $1\ 932$ kg/m³。

1.2 有限元模型建立

土壤承压沉陷特性仿真试验是一种典型的非线性有限元分析。其非线性来源主要包括土壤的材料非线性、土体受压变形造成的几何非线性和接触非线性。采用隐式静力分析时，由于网格畸变严重，经常导致计算失败。ABAQUS 软件提供了一系列求解非线性问题的方法。例如，ALE 法、单元失效法、CEL 法。ALE 法基于显示动态分析步，可以在计算过程中对每个增量步进行实时的网格重划分，改善网格质量，并且允许自定义自适应划分区域，可以通过调整每一增量步中网格重划分的次数控制网格自适应重划分的强度，从而提高网格自适应划分效率。采用显示分析和网格自适应重划分技术可以有效改善计算过程中网格畸变严重问题^[19]。

有限元仿真模型采取 3 维实体建模。载荷板为半径 $R=0.1$ m 的圆板。为简化计算，载荷板采用刚体约束，并设置参考点。综合考虑土体模型边界对仿真结果的影响和仿真计算效率，土体采用 $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m}$ 的正方体模型。建立材料分别为钢和土壤的截面属性，钢的材料参数为：密度 $7\ 800$ kg/m³、弹性模量 $E=207$ GPa、泊松比 $\mu=0.3$ ；土壤本构模型采用各向同性线弹性模型和 Mohr-Coulomb 模型，参数如 1.1 节所述。

约束土体模型 4 个侧面水平方向位移自由度，底面设置为完全固定约束；约束载荷板参考点水平方向位移自由度和 3 个方向转动自由度。整个模型采用八节点线性六面体单元，设置减缩积分、沙漏控制和网格重划分区域。土体网格拓扑结构采用中间致密四周相对稀疏的方法。采用显示动态分析步。设置载荷板参考点竖直方向载荷，加载载荷为 50 kN。模型装配体如图 1 所示。

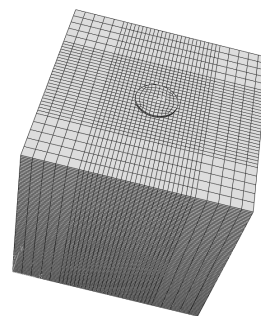


图 1 仿真模型装配体

1.3 仿真结果对比分析

取载荷板参考点垂直方向的位移载荷数据，并采用双指数方程 $F = ae^{(bz)} + ce^{(dz)}$ 、 $p = kz^n$ 对仿真数据进行拟合。拟合曲线对比如图 2 所示。

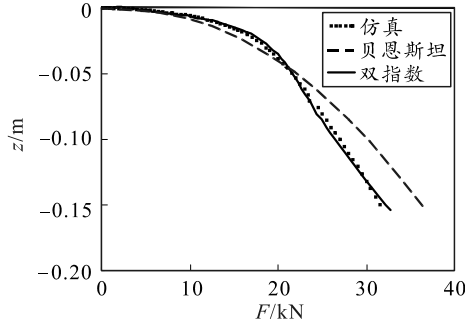
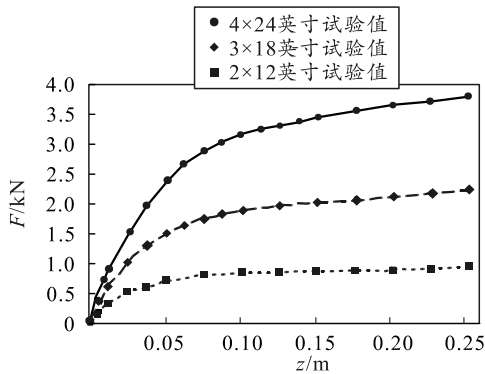


图 2 双指数模型与经典模型拟合对比

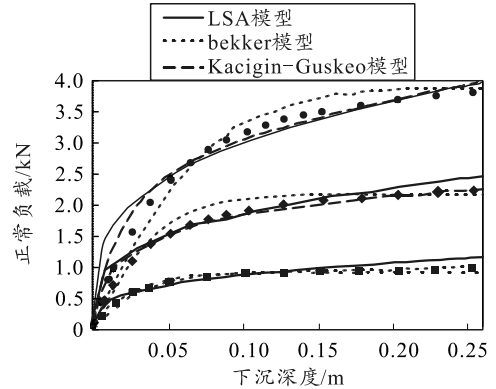
从图中可以看出：土壤压力沉陷仿真曲线主要经历 3 个阶段，即土壤在较小载荷作用下的弹性变形阶段、随着载荷增加从弹性变形到塑性变形的过渡阶段、达到极限承载力后的完全塑性变形阶段。贝恩斯坦方程在土壤弹性变形阶段具有较好的拟合效果，从过渡阶段开始拟合曲线出现较大偏差。双指数模型在土壤不同变形阶段均具有良好的拟合效果，其拟合决定系数 $R^2=0.9969$ 大于贝恩斯坦方程拟合决定系数 $R^2=0.982$ 。采用双指数模型对土壤压力沉陷仿真曲线进行拟合可取得更高的拟合精度。

1.4 双指数模型试验验证

学者 Wills BDM^[20]在湿黏土中采用尺寸分别为 2×12 、 3×18 、 4×24 英寸的矩形板进行土壤压力沉陷试验，得到土壤压力沉陷试验数据。俄罗斯学者 Modest Lyasko^[8]引用其试验结果，分别采用 bekker 模型、LSA 模型、Kacigin 和 Guskeo^[21-22]提出来的 Kacigin-Guskeo 函数进行拟合分析。在此基础上，采用双指数模型对上述湿黏土压力沉陷试验数据进行拟合，并与上述压力沉陷模型对比，得到压力沉陷曲线如图 3 所示。



(a) 双指数模型拟合曲线



(b) bekker、LSD、Kacigin-Guskeo 模型拟合曲线

图 3 双指数模型与试验数据、经典模型对比

如图 3(a)所示，采用双指数模型对 3 种尺寸矩形载荷板的压力沉陷数据进行拟合，按照载荷板尺寸由小到大，其决定系数 R^2 分别为 0.9966、0.9997、0.9994。试验验证表明：双指数模型可以对土壤压力沉陷实测数据进行拟合，并与图 3(b)中各模型拟合结果相比，双指数模型具有更好的拟合效果。

2 双指数模型参数随土壤参数变化分析

由上述研究结果可以看出，双指数模型在土壤压力沉陷关系拟合中具有较高的精度。其参数随土壤参数的变化规律值得进一步研究。考虑实地实验条件的有限性，利用有限元仿真的方法对土壤参数弹性模量 E 、泊松比 μ 、内摩擦角 φ 和黏聚力 c 对双指数模型参数 a 、 b 、 c 、 d 的影响进行分析，并对变化规律进行拟合，发现土壤单个参数对双指数模型参数的影响规律非常明显。

2.1 弹性模量对模型参数的影响

在 1.2 建立的模型基础上，分别设置土壤弹性模量 E 为 5、10、15、20、25、30 MPa。得到不同弹性模量下模型拟合方程如下式所示：

$$F = \begin{cases} -12.12e^{40.77z} + 13.88e^{-3.767z} & (E = 5 \text{ MPa}, R^2 = 0.9968) \\ -13.83e^{59.13z} + 15.6e^{-4.31z} & (E = 10 \text{ MPa}, R^2 = 0.9961) \\ -15.35e^{74.21z} + 17.14e^{-3.989z} & (E = 15 \text{ MPa}, R^2 = 0.9964) \\ -16.04e^{93.68z} + 17.78e^{-3.952z} & (E = 20 \text{ MPa}, R^2 = 0.9969) \\ -16.4e^{113.9z} + 18.13e^{-4.005z} & (E = 25 \text{ MPa}, R^2 = 0.9968) \\ -16.46e^{136z} + 18.17e^{-4.196z} & (E = 30 \text{ MPa}, R^2 = 0.9964) \end{cases} \quad (2)$$

如上式所示，与仿真结果对比，双指数方程拟合曲线具有很高的拟合精度，不同弹性模量所对应的拟合决定系数 R^2 均大于 0.99。

以弹性模量 E 为自变量，研究模型各参数随弹性模量 E 的变化规律，发现参数 a 、 b 、 c 与弹性模量 E 的关系可以用 1 阶或 2 阶多项式来表示，参数 d 随弹性模量 E 的变化规律比较复杂，各个参数随弹性模量 E 的变化拟合结果如图 4 所示。

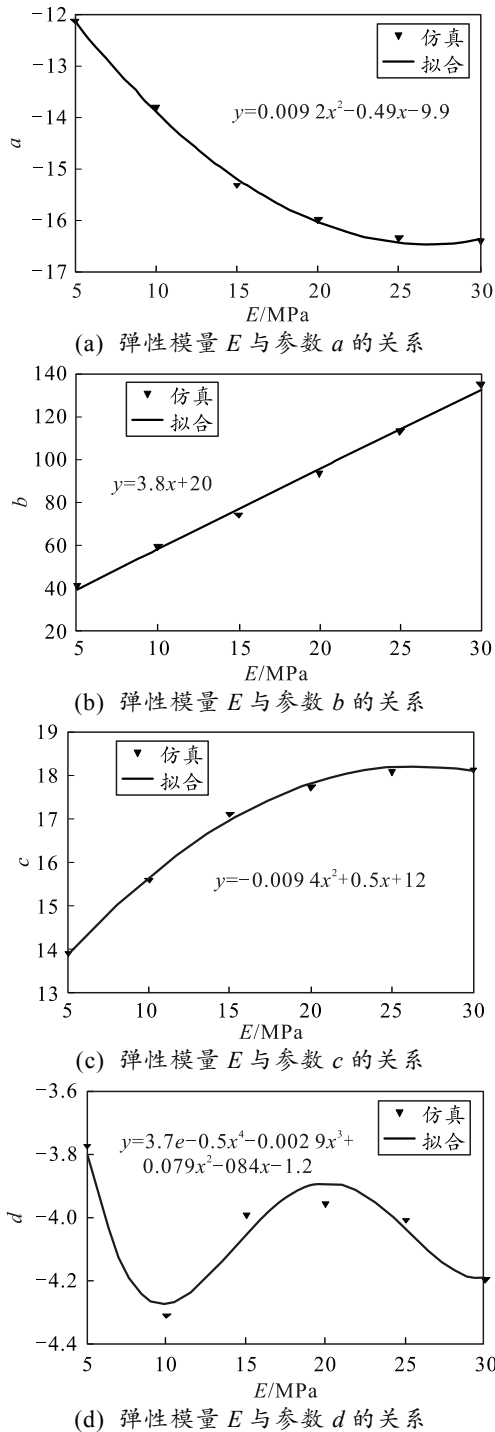


图 4 模型参数与弹性模量 E 的关系

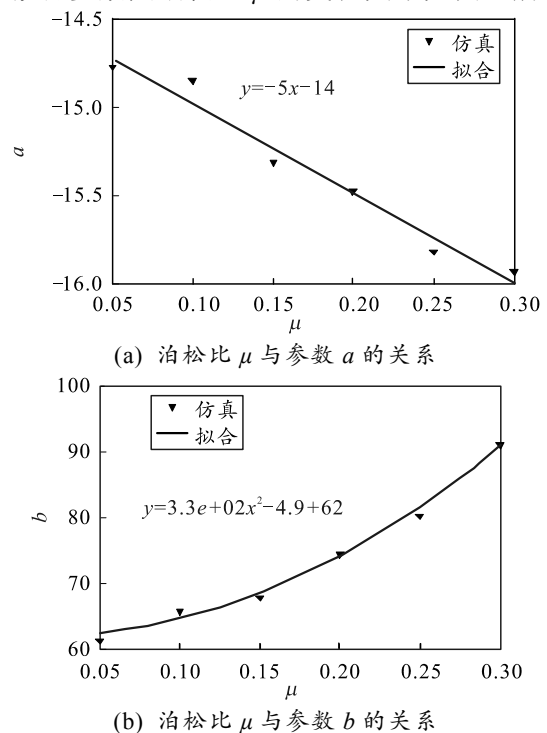
由图可得：参数 a 、 c 与弹性模量 E 之间为 2 阶多项式关系， R^2 分别为 0.997 9、0.997 2。参数 b 与弹性模量 E 之间为线性关系， $R^2 = 0.996 4$ 。参数 d 随弹性模量 E 的变化关系可用 4 阶多项式拟合，拟合决定系数 $R^2 = 0.945 7$ 。

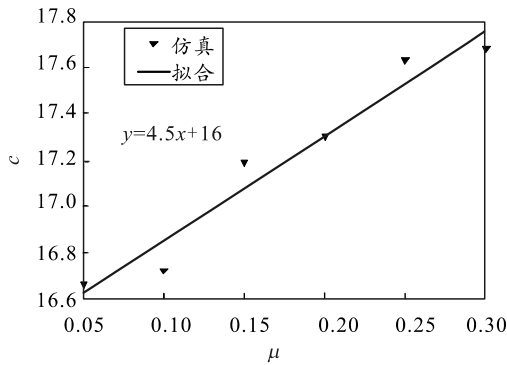
2.2 泊松比对模型参数的影响

分别设置泊松比 μ 为 0.05、0.1、0.15、0.2、0.25、0.3。得到土壤压力沉陷关系模型拟合结果如下式：

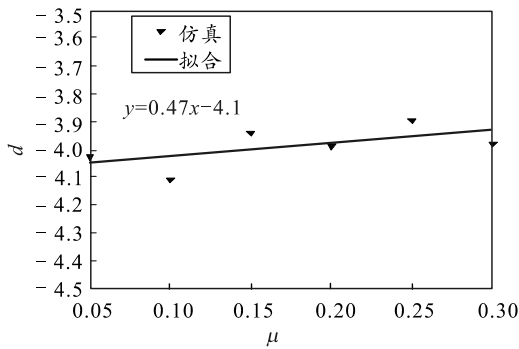
$$F = \begin{cases} -14.78e^{61.66z} + 16.66e^{-4.026z} (\mu = 0.05, \\ R^2 = 0.99962) \\ -14.86e^{65.7z} + 16.72e^{-4.109z} (\mu = 0.1, \\ R^2 = 0.9962) \\ -15.32e^{67.85z} + 17.19e^{-3.94z} (\mu = 0.15, \\ R^2 = 0.9963) \\ -15.48e^{74.24z} + 17.3e^{-3.988z} (\mu = 0.2, \\ R^2 = 0.9965) \\ -15.82e^{79.86z} + 17.63e^{-3.896z} (\mu = 0.25, \\ R^2 = 0.9967) \\ -15.93e^{90.3z} + 17.68e^{-3.978z} (\mu = 0.3, \\ R^2 = 0.9969) \end{cases} \quad (3)$$

从上式中可以看出：采用双指数模型对土壤压力沉陷关系进行拟合，拟合决定系数非常高。对模型各参数与泊松比 μ 的关系进行研究，得到双指数模型拟合参数随泊松比 μ 的变化关系如图 5 所示。





(c) 泊松比 μ 与参数 c 的关系



(d) 泊松比 μ 与参数 d 的关系

图 5 模型参数与泊松比 μ 的关系

从图中可以看出：模型参数 a 、 c 与泊松比 μ 之间为线性关系，线性拟合决定系数 R^2 分别为 0.969 3、0.950 7。参数 b 与泊松比 μ 的关系可以用 2 阶多项式拟合，决定系数 $R^2=0.993 2$ 。参数 d 随泊松比 μ 的变化规律为正相关的趋势，采用 1 阶多项式拟合时，其拟合决定系数 $R^2=0.366 2$ 。

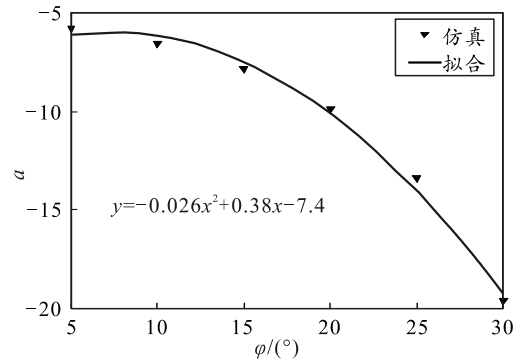
2.3 内摩擦角对模型参数的影响

分别设置土壤参数内摩擦角 $\varphi=5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ ，得到土壤压力沉陷关系拟合方程如下式：

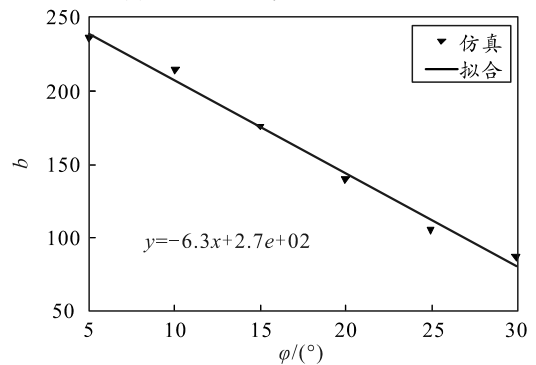
$$F = \begin{cases} -5.82e^{235.9z} + 6.815e^{-8.113z} (\varphi = 5^\circ, \\ R^2 = 0.989 4) \\ -6.606e^{213.9z} + 7.69e^{-7.504z} (\varphi = 10^\circ, \\ R^2 = 0.990 2) \\ -7.907e^{175.7z} + 9.146e^{-6.481z} (\varphi = 15^\circ, \\ R^2 = 0.991 7) \\ -9.891e^{140z} + 11.33e^{-5.673z} (\varphi = 20^\circ, \\ R^2 = 0.993 1) \\ -13.45e^{105.8z} + 15.14e^{-4.589z} (\varphi = 25^\circ, \\ R^2 = 0.995 3) \\ -19.65e^{86.8z} + 21.37e^{-3.351z} (\varphi = 30^\circ, \\ R^2 = 0.997 6) \end{cases} \quad (4)$$

由上式可以看出：随着内摩擦角 φ 的变化，双

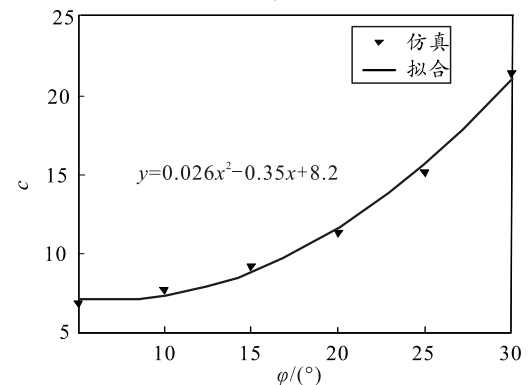
指数方程各个参数也随之改变。各个模型参数分别随内摩擦角 φ 的变化规律如图 6 所示。



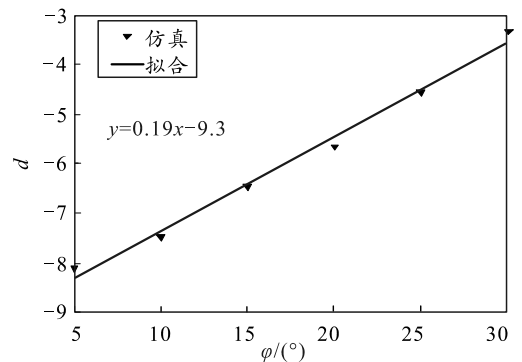
(a) 内摩擦角 φ 与参数 a 的关系



(b) 内摩擦角 φ 与参数 b 的关系



(c) 内摩擦角 φ 与参数 c 的关系



(d) 内摩擦角 φ 与参数 d 的关系

图 6 模型参数与内摩擦角 φ 的关系

由图可以看出：参数 a 、 c 与内摩擦角 φ 的关系可以由 2 阶多项式来描述，随着内摩擦角 φ 的增大

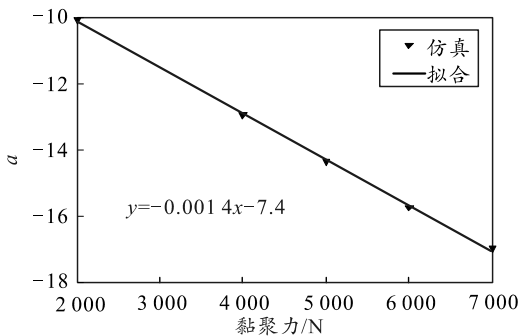
参数 a 逐渐减小, 参数 c 逐渐增大, 其拟合决定系数 R^2 分别为 0.992 6、0.994 7; 参数 b 、 d 与内摩擦角 φ 之间成线性关系, 随着内摩擦角 φ 的增大参数 b 逐渐减小, 参数 d 逐渐增大, 其决定系数 R^2 分别为 0.991 6、0.990 2。

2.4 黏聚力对模型参数的影响

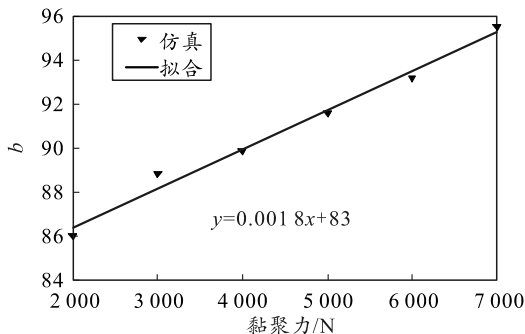
分别设置土壤本构参数黏聚力 c 为 2、3、4、5、6、7 kN, 其余条件设置与 1.2 节所建模型相同。采用双指数模型对土壤压力沉陷仿真结果进行拟合, 其拟合方程如下式所示:

$$F = \begin{cases} -10.13e^{85.98z} + 11.79e^{-4.872z} & (c = 2 \text{ kN}, \\ R^2 = 0.993 6) \\ -11.45e^{88.78z} + 13.15e^{-4.654z} & (c = 3 \text{ kN}, \\ R^2 = 0.994 3) \\ -12.89e^{89.85z} + 14.63e^{-4.345z} & (c = 4 \text{ kN}, \\ R^2 = 0.995 1) \\ -14.7e^{91.56z} + 16.02e^{-4.14z} & (c = 5 \text{ kN}, \\ R^2 = 0.996 0) \\ -15.6e^{93.19z} + 17.36e^{-3.961z} & (c = 6 \text{ kN}, \\ R^2 = 0.996 6) \\ -16.84e^{95.49z} + 18.58e^{-3.885z} & (c = 7 \text{ kN}, \\ R^2 = 0.997 2) \end{cases} \quad (5)$$

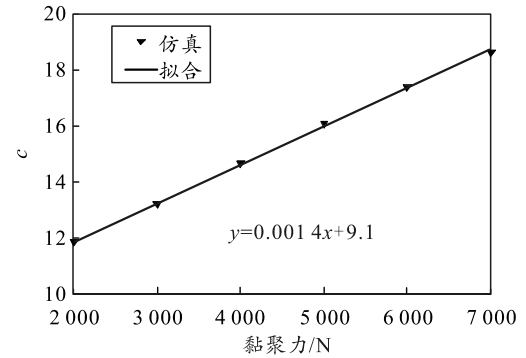
由上式可以看出, 黏聚力不同时, 双指数模型拟合精度均在 0.99 以上。模型参数随黏聚力的不同而发生改变。各参数随黏聚力的变化规律如图 7。



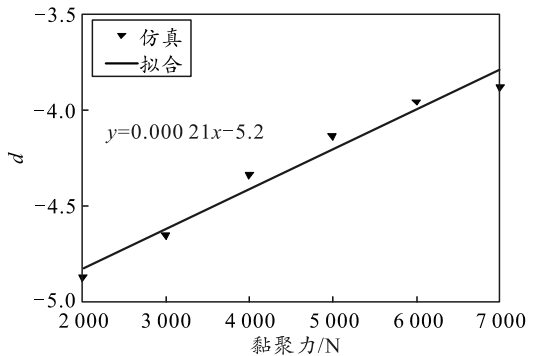
(a) 黏聚力 c 与参数 a 的关系



(b) 黏聚力 c 与参数 b 的关系



(c) 黏聚力 c 与参数 c 的关系



(d) 黏聚力 c 与参数 d 的关系

图 7 模型参数随黏聚力 c 的变化关系

从图可以看出: 双指数模型参数与土壤黏聚力的变化关系均为线性关系, 除参数 a 随黏聚力的增大而减小, 其余 3 个参数均随黏聚力的增大而增大。4 个参数与黏聚力关系线性拟合决定系数 R^2 分别为 0.999 5、0.987 3、0.999 2、0.971 0。

综上所述: 通过分别改变各土壤力学参数, 对土壤力学参数与双指数模型参数的关系进行了分析研究, 发现土壤弹性模量 E 与参数 a 、 b 、 c 的关系较为简单, 分别可以采用 1 阶或 2 阶多项式拟合, 与参数 d 的关系较为复杂, 采用四次多项式拟合时具有较好的拟合效果。泊松比 μ 对参数 a 、 b 、 c 的影响规律均可由 1 阶或 2 阶多项式拟合, 与参数 d 之间成正相关趋势, 采用 1 阶多项式拟合时, $R^2 = 0.366 2$ 。土壤内摩擦角 φ 对模型参数 a 、 c 的影响规律可由 2 阶多项式拟合, 对参数 b 、 d 的影响规律可由线性方程进行拟合。黏聚力 c 与模型参数之间均为线性关系。

3 结论

笔者依据松软黏土三轴实验参数, 建立了土壤压力沉陷有限元模型, 得到与理论模型相符的土壤压力沉陷特性曲线。发现基于有限元模型建立的土壤压力沉陷特性曲线可以用 $F = ae^{bz} + ce^{dz}$ 形式的方程进行描述, 并取得较好的结果。对湿黏土压力沉

陷实测数据进行拟合,发现采用方程 $F = ae^{bz} + ce^{dz}$ 对湿黏土压力沉陷关系进行预测是可行的。

在有限元模型的基础上发现,土壤参数弹性模量 E 、泊松比 μ 、内摩擦角 φ 、黏聚力 c 均对方程 $F = ae^{bz} + ce^{dz}$ 参数有影响。参数 a 与弹性模量 E 和内摩擦角 φ 之间分别为 2 阶多项式关系,与泊松比 μ 和黏聚力 c 之间分别为线性关系。参数 b 与弹性模量 E 、内摩擦角 φ 和黏聚力 c 之间分别为线性关系,与泊松比 μ 之间为 2 阶多项式关系。参数 c 与弹性模量 E 和内摩擦角 φ 之间分别为 2 阶多项式关系,与泊松比 μ 和黏聚力 c 之间分别为线性关系。参数 d 与内摩擦角 φ 和黏聚力 c 之间分别为线性关系,与弹性模量 E 的关系较为复杂,可采用 4 阶多项式拟合,与泊松比 μ 之间为正相关趋势。4 个土壤参数对双指数模型参数的联合影响需要进一步研究和探索,在此基础上,可以直接依据土壤参数确定土壤压力沉陷关系的双指数模型。

由于土壤本构模型的多样性,土壤本构模型对双指数模型参数的影响是研究双指数模型参数与土壤力学特性关系的重要方面,笔者的研究方法和结论可以推广到其他的土壤本构模型,从而得到每种土壤本构模型对应的压力沉陷双指数模型。

参考文献:

- [1] M G 贝克. 地面—车辆系统导论[M]. 北京: 机械工业出版社, 1978: 23-30.
- [2] 李军, 张宇, 周靖凯, 等. 大履刺履带沉陷性能预测方法研究[J]. 农业装备与车辆工程, 2013, 51(4): 33-36.
- [3] 蔡巍, 王新明, 孙家军. 江苏如东滩涂土壤承压剪切特性参数测量[J]. 制造业自动化, 2012, 34(3): 133-135.
- [4] 雷雪媛. 履带车辆履带板的优化设计[D]. 北京: 北京理工大学, 2016.
- [5] REECE A R. problems of Soil-Vehicle Mechanics[M]. Michigan: US Army Land Locomotion Lab, 1964.
- [6] 张克健. 车辆地面力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002: 154-156.
- [7] 吕唯唯. 可变形地面与履带板动态耦合特性研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2013.
- [8] MODEST L. LSA model for sinkage predictions[J]. Journal of Terramechanics, 2010, 47(1): 1-19.
- [9] 李杰, 庄继德, 季学武. 车辆行驶的沙漠沙承压特性的研究[J]. 兵工学报, 1999, 20(1): 62-64.
- [10] 杨启梁, 蒋崇贤. 水田土壤承载—下陷特性的研究[J]. 农业机械学报, 1990, 9(3): 84-89.
- [11] 姚艳, 丁启朔, 周俊. 重塑土壤承压模型的建立与试验[J]. 农业机械学报, 2010, 41(3): 40-45.
- [12] 赵家丰, 汪伟, 孙中兴, 等. 均质土壤承压下陷模型改进及验证[J]. 农业工程学报, 2016, 32(21): 60-66.
- [13] 沈仙法, 周宏平, 许林云. 履带—轮—地面相互接触非线性有限元建模[J]. 机械科学与技术, 2016, 35(2): 315-319.
- [14] 张金铮, 王琪, 金琦淳, 等. 三角履带轮移动载荷对地面受力响应仿真研究[J]. 计算机仿真, 2016, 33(12): 169-172, 192.
- [15] 何健, 马吉胜, 吴大林, 等. 土壤在垂直和水平载荷下的复合载荷—变形关系[J]. 农业机械学报, 2017, 48(9): 231-236.
- [16] 费康, 彭劼. ABAQUS 岩土工程实例讲解[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2017: 75-79.
- [17] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 57-59.
- [18] 杨聪彬. 高速履带与软地面附着特性与优化研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2015.
- [19] 王力, 王世梅. 基于 ALE 方法的贯入桩周土大变形问题的研究[J]. 地下空间与工程学报, 2013, 9(3): 530-534.
- [20] WILLS B D M. The load sinkage equation in theory and practice[J]. LLL report no, 1966, 22(3): 14-21.
- [21] KACIGIN V V, GUSKOY V V. The basis of tractor Performance theory[J]. Journal of terramechanics, 1968, 5(3): 43-66.
- [22] GUSKOY V V. Optimum parameters of agricultural tractors[M]. Moscow: Mashinostroeni, 1966: 12-18.