

doi: 10.7690/bgzd.2019.10.019

基于 H-K 固体模型的玻璃钢蠕变分析

秦予铮, 李志刚, 孙同生

(南京理工大学机械工程学院, 南京 210094)

摘要: 在对复合材料粘弹性力学理论进行研究的基础上, 建立 H-K 线性固体蠕变本构模型。运用有限元理论, 借助 ABAQUS 提供的用户材料子程序 UMAT 对 H-K 线性固体蠕变模型进行二次开发, 对玻璃钢单向板单轴拉伸的蠕变性能进行仿真分析。通过拉伸蠕变加速实验拟合得出相关材料参数, 将实验数据与理论模型、仿真模型的蠕变曲线进行对比验证。验证结果表明: 理论与仿真模型的蠕变规律能较好地与实验数据吻合, 材料本构模型可对玻璃钢长期性能进行仿真预测。

关键词: H-K 线性固体模型; ABAQUS; UMAT; 蠕变; 玻璃钢; 蠕变加速实验

中图分类号: TJ7 文献标志码: A

Creep Analysis of GFRP Based on H-K Linear Solid Model

Qin Yuzheng, Li Zhigang, Sun Tongsheng

(School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: On the basis of the study of the viscoelastic theory of composite materials, the constitutive model of H-K linear solid creep is established. Using the finite element theory and the user material subroutine UMAT provided by ABAQUS, the H-K linear solid creep model was redeveloped, and the creep performance of GFRP uniaxial tensile was simulated and analyzed. Relevant material parameters were obtained by fitting the tensile creep acceleration experiment, and the creep curves of the theoretical model and simulation model were compared and verified. The results show that the creep law of the theoretical model and the simulation model is in good agreement with the experimental data, and the material constitutive model can predict the long-term performance of FRP.

Keywords: H-K linear model; ABAQUS; UMAT; creep; GFRP; accelerated creep experiment

0 引言

复合材料具有比刚度和比强度高、质量轻、耐腐蚀性和耐候性强的特点。随着复合材料不断的发展, 在现代火箭发射武器装置中, 开始采用复合材料以实现武器轻量化的目标^[1-2]。如今玻璃钢已经被大量运用到火箭武器领域, 例如火箭定向器广泛地使用了玻璃钢材料, 且在火箭武器领域中碳纤维的运用也有广阔的前景。

笔者以定向器的玻璃钢材料为研究对象, 针对其复合材料的力学特性建立理论模型, 通过对玻璃钢试样施加单轴拉伸力, 研究玻璃钢的加速蠕变行为, 再基于理论模型在 ABAQUS/CAE 中二次开发并建立数值仿真模型。最后通过仿真模型、理论模型与实验数据的两两对比验证, 为玻璃钢材料同铺层方向与多轴受力的研究提供一种思路, 也为玻璃钢的老化性能及蠕变行为提供一种预测方案^[3]。

1 理论模型

在复合材料粘弹性力学中, 蠕变模型大概可分

为经验形式、元件组合形式和积分形式 3 种。经验形式模型是用数理统计方法对实验数据进行分析拟合验证得到, 但是一般只能描述蠕变前 2 个阶段, 不能表示加速蠕变阶段。最能反映材料蠕变性能的是元件组合形式, 是由理想弹性元件和粘性元件组合而成, 例如比较著名的三元素 H-K 线性固体模型、Maxwell 模型和 Kelvin 模型等^[4]。

玻璃钢属于树脂基玻璃纤维增强复材料, 因树脂基的粘弹性性能突出, 常被称为粘弹性材料, 具有强度高、比重轻、耐腐蚀和可设计性强的优点, 被广泛应用于火箭发射武器当中。在工程上玻璃钢复合材料受到树脂基体的影响, 在一般应用的情况下, 常表现出粘弹性的力学行为^[5-6]。笔者用图 1 所示的 H-K 线性固体模型, 来描述玻纤增强复合材料在受到单轴拉伸力时的蠕变行为。

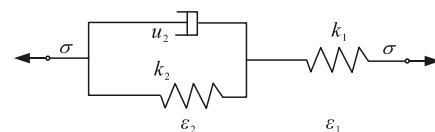


图 1 H-K 线性固体模型

收稿日期: 2019-05-12; 修回日期: 2019-06-26

作者简介: 秦予铮(1990—), 男, 广西人, 壮族, 硕士, 从事兵器发射理论与技术研究。E-mail: qk1114@163.com。

H-K 模型由弹性元件 (k_1) 与 Klevin 元件 (k_2-u_2) 串联^[7], 模型的应力 σ 和应变 ε 可用元件参量表示为:

$$\sigma_1 = k_1 \varepsilon_1; \quad (1)$$

$$\sigma_2 = k_2 \varepsilon_2 + u_2 \dot{\varepsilon}_2; \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2; \quad (3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (4)$$

采用拉式变换和逆变换来推导三元素线性固体模型的本构关系, 用 s 表示变化参量, 函数 $f(t)$ 的拉式变换定义为

$$\bar{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (5)$$

将拉式变换记做 $\zeta f(t)$, 函数导数的拉式变换由定义可得:

$$\bar{\dot{\varepsilon}}(s) = \zeta[\dot{\varepsilon}(t)] = s\bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0). \quad (6)$$

根据材料处于自然状态的假设, 初始时刻有 $\varepsilon(0) = 0, \dot{\varepsilon}(0) = 0$, 则有

$$\bar{\dot{\varepsilon}}(s) = s\bar{\varepsilon}(s). \quad (7)$$

对式(1)一式(4)做拉式变换, 得:

$$\bar{\sigma} = k_1 \bar{\varepsilon}_1; \quad (8)$$

$$\bar{\sigma} = (k_2 + u_2 s) \bar{\varepsilon}_2; \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2. \quad (10)$$

把式(8)和式(9)代入式(10), 然后作拉式逆变换, 得到

$$(k_1 + k_2)\sigma + u_2 \dot{\sigma} = k_1 k_2 \varepsilon + k_1 u_2 \dot{\varepsilon}. \quad (11)$$

当应力 $\sigma = \sigma(t) = \sigma_0 H(t)$, $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 时,

$\bar{\sigma} = \sigma_0 / s, \bar{\dot{\sigma}} = \bar{\sigma} s = \sigma_0$, 代入 1 阶微分方程式(11)中, 整理得到 $\frac{\sigma_0}{s} + \frac{u_2}{k_1 + k_2} \sigma_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \bar{\varepsilon} + \frac{k_1 u_2}{k_1 + k_2} s \bar{\varepsilon}$, 求解 $\bar{\varepsilon}$, 并进行 Laplace 逆变换, 可以得出三参量固体模型的粘弹性本构方程如下:

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} (1 - e^{-tk_2/u_2}) \right] \sigma_0. \quad (12)$$

由上式得到, H-K 模型的蠕变柔量表达式为

$$J(t) = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} (1 - e^{-tk_2/u_2}). \quad (13)$$

在上式中 k_1, k_2, u_2 为粘弹性参数, 且在 $t = 0$ 的时刻, 式(13)变为: $J(0) = 1/k_1$, 可近似认为在短时间内, 材料的弹性模量为 k_1 。

在工程应用中, 粘弹性 3 维微分本构方程为

$$P[\sigma] = Q[\varepsilon]. \quad (14)$$

为简化研究, 在小变形的情况下, 式(14)中的应力张量 σ 分解成球形张量和偏斜张量 2 部分, 应变张量 ε 可以分离成体积改变和等体积的形状畸变 2 部分, 得到:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \frac{\delta_{ij} \sigma_{kk}}{3}; \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{\delta_{ij} \varepsilon_{kk}}{3}; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (15)$$

式中 δ_{ij} 为 Kronecker 符号。

2 数值仿真

为了验证玻璃钢粘弹性本构模型的有效性, 需开展玻璃钢单向板单轴拉伸力学性能的实验研究, 拟合出玻璃钢粘弹本构模型的参数^[8], 并嵌入 ABAQUS 的二次开发 UMAT 子程序中, 进行玻璃钢单轴拉伸数值仿真分析。

2.1 玻璃钢单向板实验

本次实验为单轴蠕变拉伸实验, 所用试样材料由 EDR60-T910 玻璃钢预浸料经冷压工艺, 制成厚度为 2.03 mm 的单向板, 参照国家标准 GB/T 3354—2014 制取试样, 试样如图 2^[9]所示。采用三思纵横 UTM5504 型号万能试验机, 北钢院 YYU-10/100 型号引伸计进行单轴蠕变拉伸实验, 实验条件见表 1, 实验装置如图 3 所示。根据初始性能实验已经测出 0°方向单向板试样拉伸弹性模量为 40.7 GPa, 拉伸强度为 0.916 GPa, 为防止拉伸力过大导致试样断裂, 参照 JIS/K7087—1996 碳纤维复合材料拉伸蠕变标准, 预估 0°玻璃钢单向板的 60%极限应力为危险应力^[10]; 因此, 取 40%的拉伸极限应力作为恒力进行蠕变实验。

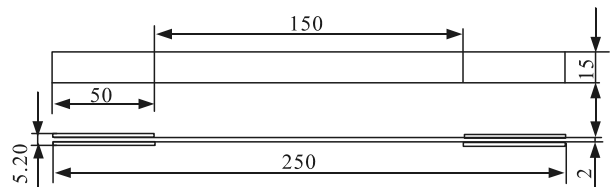


图 2 蠕变拉伸试样

表 1 蠕变拉伸实验条件

序号	温度/°C	应力/MPa	时间/h
1	27.6	368	8
2	28.5	368	8
3	27.2	368	8

在实验中, 为了准确计量蠕变变形, 试验机应在尽量短的时间内达到恒定应力; 因此, 实验中设置试验机加载时间为 50 s, 之后, 力保持恒定且每隔

300 s 记录各时间点的蠕变时效变形量 ΔL ， L_0 为试样的标记长度， $\varepsilon = \Delta L/L_0$ ， ε 即为蠕变应变。根据实验数据，按 0.5 h 的时间间隔整理得出变形量与时间的关系如图 3。

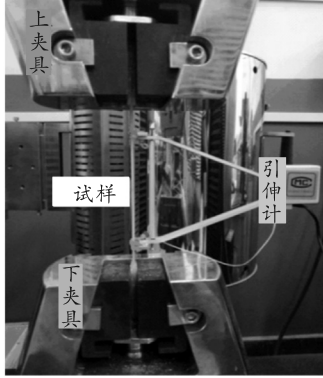


图 3 蠕变拉伸实验

由图 4 可知：在 368 MPa 拉伸应力下的蠕变应变随着蠕变时效时间的增加而不断增加，在 0~3 h 的蠕变应变增速较快，3~8 h 的增速趋缓，根据 3 个试样的实验数据取平均值得到 0~8 h 变形曲线。

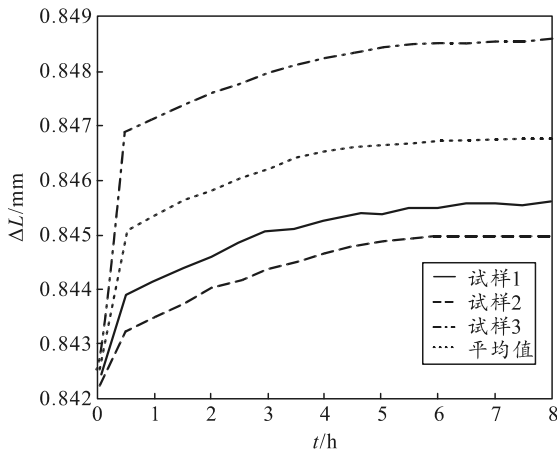


图 4 蠕变拉伸实验

依式(13)作出蠕变柔量与时间关系的曲线如图 5，对蠕变拉伸实验数据进行参数的非线性拟合如表 2 所示，其中： $A=1/k_1, B=1/k_2, C=k_2/u_2$ 。再换算可得到玻璃钢单向板蠕变本构的材料参数如下：

$k_1 = 41.96, k_2 = 3182.6, u_2 = 2.72 \times 10^7$ 。

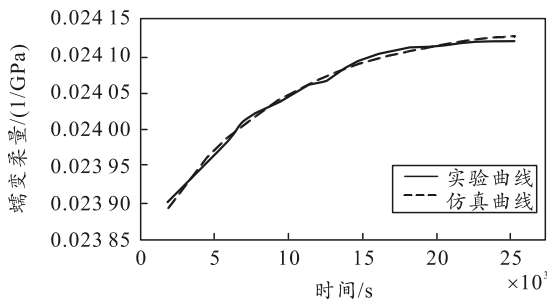


图 5 材料参数拟合曲线

表 2 蠕变拉伸参数拟合

蠕变拟合公式	$y=A+B(1-e^{-Cx})$
拟合误差	0.994 83
A	0.023 83
B	$3.142 4e^{-4}$
C	$1.174 19e^{-4}$

2.2 玻璃钢单向板 UMAT 二次开发数值模型

由于有限元软件 ABAQUS 现有材料库中没有 H-K 线性固体的粘弹性本构模型，因此，采用 ABAQUS 提供的用户材料本构子程序的 Fortran 语言接口定义玻璃钢的材料属性，使 ABAQUS 能使用材料库中没有定义的材料模型。对于三元素线性固体本构模型，笔者主要用 UMAT 子程序来编写其材料属性。

为进行三元素线性固体模型 UMAT 子程序开发，对式(11)全量格式本构进行有限元离散，建立 3 维应力增量与应变增量之间的关系^[11]。

在玻璃钢单向板只受到单轴拉伸力时，式(15)可缩写为

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (16)$$

式中 λ 和 μ 为 Lamé 系数。

根据上式可知，式(14)可表示成三参量固体粘弹性本构，并进行 Laplace 变换得到：

$$\overline{P'} S_{ij} = \overline{Q'} e_{ij}, \overline{P''} \overline{\sigma}_{ii} = \overline{Q''} \overline{\varepsilon}_{ii}; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (17)$$

对于 H-K 线性固体粘弹性材料，可以认为应变球张量(反映体积变化)只与应力球张量(静水应力状态)有关，而应变偏量(剪切变形)只与应力偏量(剪应力)有关，粘弹性力学中的本构方程可以依据弹性-粘弹性对应原理，由弹性关系中的对应方程求得：

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{xx}, \sigma_{yy} = 2\mu \varepsilon_{yy}, \\ \dot{\sigma}_{xx} &= \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{xx}, \dot{\sigma}_{yy} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{yy}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{yy}, \sigma_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz}, \\ \dot{\sigma}_{yy} &= \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{yy}, \dot{\sigma}_{xz} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{zz}, \sigma_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz}, \\ \dot{\sigma}_{zz} &= \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{zz}, \dot{\sigma}_{yz} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{yz} \end{aligned} \quad (18)$$

由上式变化得：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} + \tilde{\nu} \dot{\sigma}_{xx} &= \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{xx} + \tilde{\lambda} \dot{\varepsilon}_{kk} + 2\tilde{\mu} \dot{\varepsilon}_{xx} \\ \sigma_{yy} + \tilde{\nu} \dot{\sigma}_{yy} &= \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{yy} + \tilde{\lambda} \dot{\varepsilon}_{kk} + 2\tilde{\mu} \dot{\varepsilon}_{yy} \\ \sigma_{zz} + \tilde{\nu} \dot{\sigma}_{zz} &= \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{zz} + \tilde{\lambda} \dot{\varepsilon}_{kk} + 2\tilde{\mu} \dot{\varepsilon}_{zz} \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} + \tilde{\nu} \dot{\sigma}_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy} + 2\tilde{\mu} \dot{\varepsilon}_{xy} \\ \sigma_{xz} + \tilde{\nu} \dot{\sigma}_{xz} &= 2\mu \varepsilon_{xz} + 2\tilde{\mu} \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \sigma_{yz} + \tilde{\nu} \dot{\sigma}_{yz} &= 2\mu \varepsilon_{yz} + 2\tilde{\mu} \dot{\varepsilon}_{yz} \end{aligned} \right\} \circ$$

式中： $\lambda, \mu, \tilde{\nu}$ 为材料常数，满足 $\tilde{\lambda} = \lambda \times \tilde{\nu}$ ， $\tilde{\mu} = \mu \times \tilde{\nu}$ ，

根据单轴拉伸实验，并通过实验曲线拟合获得了式(12)中粘弹性参数 k_1 、 k_2 、 u_2 的值，在单轴拉伸情况下，满足 $\epsilon_{kk} = (1 - 2\gamma)\epsilon_{xx}$ ， γ 为泊松比，式(18)可变化得：

$$\sigma_{xx} + \tilde{\nu}\dot{\sigma}_{xx} = [\lambda(1 - 2\gamma) + 2\mu]\epsilon_{xx} + [\tilde{\lambda}(1 - 2\gamma) + 2\tilde{\mu}]\dot{\epsilon}_{xx}。$$

将上式与式(11)对比，即可获得 $\lambda, \mu, \tilde{\nu}$ 的值。

上述方程可根据下式的中点差分法求解：

$$\dot{f}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\Delta f}{\Delta t}, f_{t+\frac{\Delta t}{2}} = f_t + \frac{\Delta f}{2}。 \quad (19)$$

可得出应力增量公式，并依此推导出 Jacobian 矩阵：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{xx}} &= \frac{\Delta t(0.5\lambda + \mu) + \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{0.5\Delta t + \tilde{\nu}}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} &= \frac{0.5\lambda\Delta t + \tilde{\lambda}}{0.5\Delta t + \tilde{\nu}}, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \gamma_{xy}} &= \frac{0.5\mu\Delta t + \tilde{\mu}}{0.5\Delta t + \tilde{\nu}}。 \end{aligned} \quad (20)$$

至此，获得了粘弹性蠕变本构模型进行子程序开发所需的 3 维增量格式，子程序的开发是在材料

积分点上读取应变增量 DSTRAN，计算应力增量，并对主程序进行应力更新。针对式(12)和 UMAT 所提供的接口，用 FORTRAN 语言编写子程序，从而将 H-K 线性固体模型嵌入到 ABAQUS 中。

3 对比分析

在 ABAQUS/CAE 中按照试样实际尺寸建立模型如图 6(a)，蠕变过程分为加载、蠕变 2 个分析步。蠕变分析步中采用通用分析中的 Visco 求解器，其他分析步采用静态分析。在主坐标系 y 的负方向为试样一端的 2 个加强片施加拉伸力 11 kN，模拟试验机上夹具施加的单轴拉伸载荷，另一端的加强片边界固定，模拟试验机下夹具固紧。网格单元类型为 C3D8 完全积分单元。材料参数 PROPS(1)~(2)代表 λ, μ 分别为：25.79 和 15.81 GPa, PROPS(3)~(7)分别代表 $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ ，以及参数 B 和 C 。

图 6(b)为拉伸 8 h 后，试样在引伸计标距 100 mm 范围内的应力云图，得出 Mises 最大应力值为 368.9 MPa，图 6(c)为受拉伸力方向，试样在引伸计标距范围的变形云图，在 100 mm 初始计量处经过 8 h 的拉伸后变形为 0.847 mm。

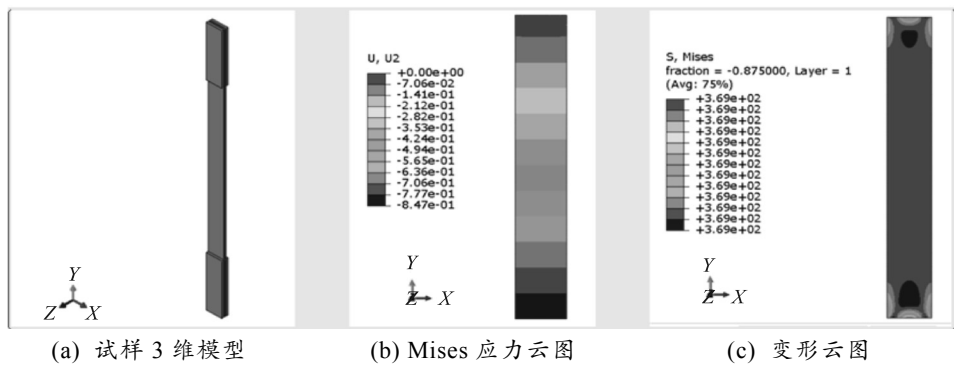


图 6 数值仿真模型与应力、变形云

在蠕变分析步中，提取的蠕变变形随时间变形的曲线如图 7 所示，因拉伸载荷的方向为沿 y 的负方向，因此变形值为负值。

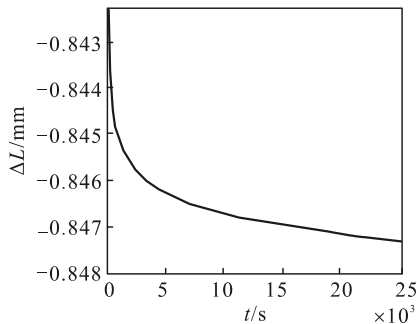


图 7 蠕变变形曲线

将 0° 试样蠕变的实验数据曲线、理论拟合曲线

和仿真曲线进行对比如图 8，由图 4 可知曲线拟合误差为 0.9%。

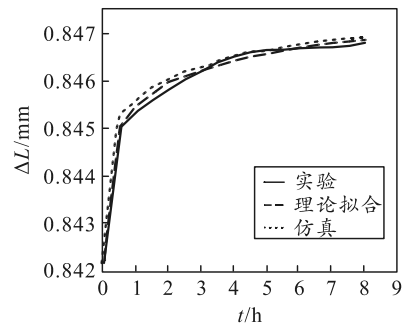


图 8 仿真、实验与拟合曲线对比

仿真结果的相对误差可以近似为仿真曲线与拟合曲线的误差值与拟合误差之和，即相对误差=仿

真误差+拟合误差,可得出相对误差为 1.02%,数值仿真得出的蠕变数据略大于实验数据,可以满足工程中材料性能预测的需求。分析表明,基于上述材料子程序建立的有限元模型能够有效反映在常温下 0°玻璃钢单向板蠕变过程。

4 结论

1) 建立 H-K 线性固体的本构理论模型描述了玻璃钢材料的力学性能,通过蠕变拉伸实验得出蠕变变形与时间的关系曲线。

2) 建立基于 ABAQUS/CAE 子程序二次开发的玻璃钢蠕变有限元模型,并结合蠕变变形云图结果,分析玻璃钢单向板的变化规律。

3) 通过玻璃钢单向板材料的实验数据曲线与有限元仿真所得的数据曲线对比分析,验证了该有限元分析模型的可行性。

笔者依据 H-K 线性固体理论,通过二次开发建立的有限元仿真模型与拉伸蠕变实验数据对比可知误差较小。该方法针对玻璃钢不同铺层方向得出材料与多轴向力的蠕变问题有参考价值,后续也可利用此仿真模型对受恒定应力玻璃钢的长期性能进行预测。

参考文献:

[1] 李培珍,李志刚. 复合材料定向器力学特性仿真[J].

兵工学报, 2012, 11(33): 1404-1408.

- [2] 周祝林,杨云娣. 纤维增强塑料蠕变机理的初步探讨[J]. 玻璃钢/复合材料, 1985(4): 31-35.
- [3] 苏腾腾,于存贵,宋涛. 玻璃钢定向器老化性能及蠕变行为研究[J]. 兵器装备工程学报, 2015(10): 139-141.
- [4] PENG R D. Modeling of Nano-Reinforced Polymer Composites: Microstructure Effect on Young's Modulus[J]. Computational Materials Science, 2012, 60: 19-31.
- [5] CHEN J Z, LI Z, ZHU S R, et al. Prediction of Long Term Properties of Fiberglass Pipe Based on the Shift Factors Method[J]. Advanced Materials Research, 2013, 748: 411-415.
- [6] 朱雯娟. 玻璃纤维增强塑料夹砂管的环刚度分析[J]. 玻璃钢/复合材料, 2013(6): 36-39.
- [7] 张小玉,黄乾钰,陈建中,等. 聚合物基复合材料单向板黏弹性模型[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2015(1): 30-33.
- [8] RAFIEE R, MAZHARI B. Simulation of the long-term hydrostatic tests on Glass Fiber Reinforced Plastic pipes[J]. Composite Structures, 2016, 136: 56-63.
- [9] 佟景伟. 复合材料层合板的数值分析与实验[J]. 实验力学, 2000, 15(2): 183-187.
- [10] 陈循,张春华. 加速试验技术的研究、应用与发展[J]. 机械工程学报, 2009, 45(8): 130-136.
- [11] 王勖成. 有限元单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003: 45-50.