

doi: 10.7690/bgzdh.2023.08.012

基于微分对策的多飞行器协同捕获空间划分

胡艳艳¹, 林旭锋¹, 张艳玲¹, 夏辉², 张乃文², 鄢容易²

(1. 北京科技大学自动化学院, 北京 100083; 2. 北京电子工程总体研究所第五事业部, 北京 100854)

摘要: 针对多飞行器协同围捕问题, 提出一种基于微分对策的加权制导律下捕获空间划分方法。选取合适的性能函数, 建立多对一协同围捕微分对策模型; 利用哈密尔顿函数法求解得出飞行器和目标的最优控制策略, 获得各飞行器的零控脱靶量的最优轨迹; 以 2 个飞行器为例, 设置 1 个 2 对 1 协同围捕场景, 根据 2 个飞行器初始零控脱靶量的符号和大小关系, 给出各飞行器单独拦截以及协同围捕状态下的相关定义; 根据各飞行器零控脱靶量的最优轨迹, 围绕初始零控脱靶量给出 1 种协同捕获空间的划分方法; 设置 3 个具体的仿真场景, 验证结果证明了该方法的准确性。

关键词: 协同围捕; 微分对策; 制导律; 捕获空间

中图分类号: TJ02 **文献标志码:** A

Partition of Cooperative Acquisition Space for Multiple Aircrafts Based on Differential Game

Hu Yanyan¹, Lin Xufeng¹, Zhang Yanling¹, Xia Hui², Zhang Naiwen², Yan Rongyi²

(1. School of Automation, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. No. 5 Department, Beijing Institute of Electronic System Engineering, Beijing 100854, China)

Abstract: To solve the cooperative capture problem of multiple aircrafts, a partition method of capture space based on differential game under weighted guidance law is proposed. Aiming at the relative motion model of multiple aircrafts and targets, an appropriate performance function is selected, and a many-to-one cooperative hunting differential game model is established; the optimal control strategies of aircrafts and targets are obtained by using the Hamiltonian function method, and the optimal trajectories of the zero control miss distance of each aircraft are obtained; Taking two aircrafts as an example, a two-to-one cooperative capture scenario is set up, and according to the sign and magnitude relationship of the initial zero-effort miss distance of the two aircrafts, the relevant definitions of each aircraft in the state of individual interception and cooperative capture are given, and according to the optimal trajectory of each aircraft in the state of zero-effort miss distance, a division method of cooperative capture space is given around the initial zero-effort miss quantity; Three specific simulation scenarios are set up, and the verification results prove the accuracy of the method.

Keywords: cooperative capture; differential game; guidance law; capture space

0 引言

近年来, 随着人工智能、集群控制、数据融合等技术的发展, 对于飞行器的研究也在向信息化、智能化、体系化的方向发展, 多飞行器协同围捕以其独特的优势受到了越来越多的关注^[1-5]。多飞行器协同围捕是指多枚飞行器或不同类型的飞行器在时间或空间上同时接近目标, 实现群体围捕的效果。与传统的单飞行器与单个目标对抗相比, 多飞行器协同围捕不但能够提高制导精度和围捕成功率^[6], 而且还能完成单飞行器不能完成的工作, 例如实现战术隐身技术^[7]和饱和攻击^[8-9]。

国内外目前关于多飞行器协同围捕问题的研究大都围绕协同制导律的设计展开。文献[10]在假定

各飞行器围捕时间相同的条件下, 提出一种基于时间约束的协同制导律。文献[11]在时间约束协同制导律的基础上, 又考虑了多角度约束问题, 提出了一种多角度约束下的时间协同制导律。为解决协同围捕过程中的不确定性问题, 文献[12]设计了一种基于滑模控制的多角度约束下的时间协同制导律。文献[11-12]中设计的制导律均没有考虑飞行器之间的通信问题。文献[13]考虑了飞行器之间的通信问题, 多枚飞行器采用主从式的拓扑结构, 设计了一种时间协同制导律, 并通过李雅普诺夫函数证明了其稳定性。文献[14]在考虑了多飞行器主从式结构的基础上, 进一步提出了一种考虑相邻从飞行器之间通信的时间协同制导律。文献[13-14]中设计的

收稿日期: 2023-03-31; 修回日期: 2023-05-07

作者简介: 胡艳艳(1981—), 女, 陕西人, 博士。

制导律均为集中式，这对飞行器控制中心计算能力的要求较高。文献[15]在目标机动性未知的情况下，基于多飞行器时间协同制导律，提出了一种分布式时间协同制导律，在这种情况下，多个飞行器之间不存在主从关系，各个飞行器受各自的控制中心控制。文献[16]提出了协调变量和协调函数的概念。文献[17]将该思想运用到实现无人机的控制中，取得了满意效果。

上述工作都是以协同制导律的设计为目的来研究多飞行器协同围捕问题。文献[18]以 2 枚飞行器对抗 1 个目标为例，提出了一种对策空间的划分方法，主要讨论了拦截空间的划分问题。文献[19]在微分对策联合制导律的条件下，讨论了多飞行器协同捕获空间的划分问题。

受上述工作的启发，笔者在考虑微分对策加权制导率的条件下，探讨了多飞行器协同围捕捕获空间的划分问题：1) 考虑了多飞行器协同围捕性能要求，选取了合适的性能函数，给出了最优协同制导律；2) 以 2 枚飞行器为例，基于各飞行器给定的初始零控脱靶量，提出一种协同捕获空间划分的方法，并通过仿真验证了该方法的合理性和准确性。

1 协同围捕相对运动建模

1.1 运动学建模

为简化问题分析，做出如下假设^[20]：

- 1) 飞行器和目标在初始视线方向上的速度近似为常值；
- 2) 飞行器和目标可以获得彼此的精确信息；
- 3) 围捕过程满足线性化条件；
- 4) 飞行器和目标的加速度均有界。

末制导段俯仰平面飞行器目的相对运动关系如图 1 所示。其中： V 、 a 分别为速度、加速度； r 为飞行器与目标之间的距离； y 为目标与飞行器在垂直于视线方向上的相对距离；下标 P_i 、 P_j 和 E 分别为第 i 枚、第 j 枚飞行器和目标； P_iE 为 P_i 与 E 之间的对抗； P_jE 为 P_j 与 E 之间的对抗； 0 为初始时刻。

多飞行器与目标对抗相对运动模型可以表示为：

$$\dot{x} = Ax + Bu_p + Cu_E \quad (1)$$

式中： $x = [y_{P_iE} \cdots y_{P_iE} \cdots y_{P_jE} \dot{y}_{P_iE} \cdots \dot{y}_{P_iE} \cdots \dot{y}_{P_jE}]^T$ ；

$$u_p = [u_{P_1} \cdots u_{P_i} \cdots u_{P_n}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad A_1 = A_3 = A_4 = \mathbf{0}_n, \quad A_2 = I_n$$

$$B = [B_{P_1} \quad B_{P_2}]^T, \quad B_{P_1} = \mathbf{0}_n, \quad B_{P_2} = -I_n;$$

$$C = [C_{E1} \quad C_{E2}]^T, \quad C_{E1} = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad C_{E2} = \mathbf{1}_{n \times 1} \circ$$

式中： n 为飞行器个数， n 个飞行器分别用 P_1, P_2, \dots, P_n 表示； x 为统一视线坐标系下的状态向量； y_{P_iE} 和 \dot{y}_{P_iE} 分别为飞行器 P_i 和目标 E 在垂直于初始视线方向上的距离和速度； u_{P_i} 和 u_E 分别为飞行器 P_i 和目标 E 的加速度指令； I_n 为 n 阶单位阵，粗体 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$ 分别为元素全为 0、全为 1 的矩阵，相应的下标表示其维数。

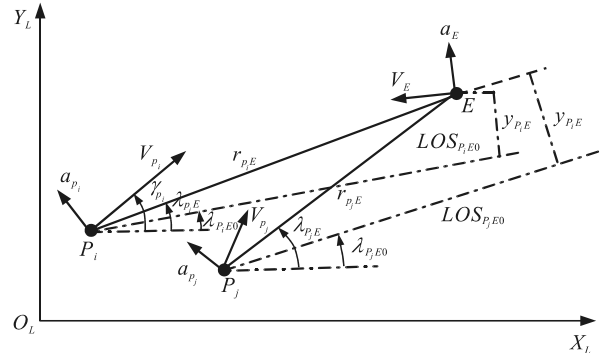


图 1 飞行器与目标的相对运动关系

根据假设 1) 和假设 3)，在给定初始条件下，飞行器完成围捕所需要的时间为：

$$t_{P_i f} = -r_{P_iE} / \dot{r}_{P_iE}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

式中 \dot{r}_{P_iE} 为飞行器 P_i 与目标 E 之间的相对速度。

不失一般性地假设 $t_{P_1 f} < \dots < t_{P_i f} < \dots < t_{P_n f}$ 。当 $t > t_{P_i f}$ ，则飞行器 P_i 的脱靶量为常数，且飞行器 P_i 的控制量为零。围捕的结束时间为 $\max\{t_{P_1 f}, \dots, t_{P_i f}, \dots, t_{P_n f}\}$ 。

各飞行器围捕目标时的剩余飞行时间定义为：

$$t_{P_i go} = t_{P_i f} - t \quad (3)$$

为避免控制饱和，对飞行器和目标的机动过载做出如下约束：

$$|u_{P_i}| < a_{P_i}^{\max}, \quad |u_E| < a_E^{\max} \quad (4)$$

式中 $a_{P_i}^{\max}$ 和 a_E^{\max} 分别为飞行器 P_i 和目标 E 的机动过载。

1.2 微分对策建模及制导律的求解

根据终端投影变换的降阶方法^[21]引入飞行器的脱靶量 $Z_{P_i}(t)$ ，并将其对时间 t 求导，可以得到飞行器 P_i 与目标 E 的脱靶量动态方程为：

$$\dot{Z}_{P_i}(t) = -t_{P_i go} u_{P_i}(t) + t_{P_i go} u_E(t) \quad (5)$$

为实现每一枚飞行器的脱靶量达到最小，目标脱靶量达到最大的控制策略，选取性能函数：

$$\left. \begin{aligned} J_{P_i} &= |Z_{P_i}(t_{P_{if}})| \\ J_E &= \min \{ |Z_{P_1}(t_{P_{if}})|, |Z_{P_2}(t_{P_{if}})|, \dots, |Z_{P_n}(t_{P_{if}})| \} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

根据控制策略的 1 阶最优必要条件，利用哈密尔顿函数法^[18]，给出飞行器 P_i 和目标 E 的最优控制策略分别为：

$$\left. \begin{aligned} u_{P_i}^* &= a_{P_i}^{\max} \operatorname{sgn}\{Z_{P_i}(t_{P_{if}})\} \\ u_E^* &= a_E^{\max} \{ \kappa_1 \operatorname{sgn}\{Z_{P_1}(t_{P_{if}})\} + \kappa_2 \operatorname{sgn}\{Z_{P_2}(t_{P_{if}})\} + \dots + \\ &\quad \kappa_{n-1} \operatorname{sgn}\{Z_{P_{n-1}}(t_{P_{if}})\} + (1 - \kappa_1 - \dots - \kappa_{n-1}) \operatorname{sgn}\{Z_{P_n}(t_{P_{if}})\} \} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= 1, \kappa_{i \neq 1} = 0 \\ \text{当 } |Z_{P_1}(t_{P_{if}})| &< |Z_{P_2}(t_{P_{if}})| < \dots < |Z_{P_n}(t_{P_{if}})| \\ \kappa_1 &= \sigma_1, \kappa_2 = \sigma_2, \kappa_{i \neq 1,2} = 0, \sigma_1 + \sigma_2 = 1, 0 \leq \sigma_i \leq 1 \\ \text{当 } |Z_{P_1}(t_{P_{if}})| &= |Z_{P_2}(t_{P_{if}})| < \dots < |Z_{P_n}(t_{P_{if}})| \\ \kappa_1 &= \sigma_1, \kappa_2 = \sigma_2, \kappa_3 = \sigma_3, \kappa_{i \neq 1,2,3} = 0, \sigma_1 + \sigma_2 + \\ &\quad \sigma_3 = 1, 0 \leq \sigma_i \leq 1 \\ \text{当 } |Z_{P_1}(t_{P_{if}})| &= |Z_{P_2}(t_{P_{if}})| = |Z_{P_3}(t_{P_{if}})| < \dots < |Z_{P_n}(t_{P_{if}})| \\ &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

2 捕获空间结构划分

第 1 节建立了多飞行器协同围捕相对运动模型，给出了多飞行器与目标的最优控制策略。接下来，根据最优控制策略式(7)，以 2 枚飞行器 P 和 Q 为例，以 2 对 1 对抗协同围捕的捕获空间进行划分。

2.1 脱靶量最优轨迹

将飞行器 $i \in \{P, Q\}$ 与目标 E 的最优控制策略式(7)代入式(5)，并将其从 t_f 到 t 进行反向积分，可得到飞行器 P 和 Q 的脱靶量最优轨迹分别为：

$$\begin{aligned} Z_P^*(t) &= Z_P(t_{Pf}) + t_{go}^2 [(a_P^{\max} - a_E^{\max} \kappa) / 2 \cdot \\ &\quad \operatorname{sgn}(Z_P(t_{Pf})) - a_E^{\max} (1 - \kappa) \operatorname{sgn}(Z_Q(t_{Qf}))]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Z_Q^*(t) &= Z_Q(t_{Qf}) + t_{go}^2 [-a_E^{\max} \kappa \operatorname{sgn}(Z_P(t_{Pf})) + \\ &\quad (-a_E^{\max} (1 - \kappa) + a_Q^{\max}) \operatorname{sgn}(Z_Q(t_{Qf}))] / 2. \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 捕获空间定义

为便于分析问题，给出以下定义和引理：

定义 1：定义初始零控脱靶量的集合

$\{(Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) | u_P = u_P^*, u_Q = u_Q^*, u_E = u_E^*; Z_P(t_f) = 0, |Z_Q(t_{Qf})| > |Z_P(t_{Pf})|\}$ ，为飞行器 P 的捕获空间。

定义 2：定义初始零控脱靶量的集合

$\{(Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) | u_P = u_P^*, u_Q = u_Q^*, u_E = u_E^*; Z_Q(t_{Qf}) = 0, |Z_Q(t_{Qf})| < |Z_P(t_{Pf})|\}$ ，为飞行器 Q 的捕获空间。

定义 3：定义初始零控脱靶量的集合

$\{(Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) | u_P = u_P^*, u_Q = u_Q^*, u_E = u_E^*; \operatorname{sgn}\{Z_Q(t_0)\} \neq \operatorname{sgn}\{Z_P(t_0), |Z_Q(t_{Qf})| = |Z_P(t_{Pf})| = 0\}$ ，为飞行器 PQ 的协同捕获空间。

定义 4：定义初始零控脱靶量的集合

$\{(Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) | u_P = u_P^*, u_Q = u_Q^*, u_E = u_E^*; |Z_P(t_{Pf})| > 0, |Z_Q(t_{Qf})| > 0\}$ ，为正则区。

引理 1^[19]：在围捕过程中，飞行器 i 的最优轨迹 $Z_i^*(t)$ 的符号不变，对 $\forall t \in [t_0, t_{if}]$ 满足：

$$\operatorname{sgn}\{Z_i^*(t)\} = \operatorname{sgn}\{Z_i^*(t_{if})\} \quad (11)$$

2.3 捕获空间划分方法

在给出飞行器的最优轨迹式(9)和(10)和捕获空间定义条件下，进一步分析多飞行器协同围捕捕获空间的划分问题。假定 2 枚飞行器的机动过载 a_P^{\max}, a_Q^{\max} 均不小于目标的机动过载 a_E^{\max} ，依据飞行器与目标的最优轨迹，以及 2 枚飞行器终端脱靶量 $Z_P(t_{Pf})$ 和 $Z_Q(t_{Qf})$ 的符号及大小关系，划分捕获空间，得到如下结论：

定理 1：当 $Z_P(t_{Pf})$ 和 $Z_Q(t_{Qf})$ 符号相同时， P 飞行器捕获空间 $P_1 \cup P_3$ 和 Q 飞行器捕获空间 $Q_1 \cup Q_3$ 分别为：

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ (Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) \left| \begin{aligned} |Z_Q(t_0)| &> \frac{t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} - a_E^{\max})} |Z_P(t_0)| \\ |Z_P(t_0)| &< \frac{1}{2} t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} - a_E^{\max}) \end{aligned} \right. \right\}; \\ P_3 &= \left\{ (Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) \left| \begin{aligned} |Z_Q(t_0)| &< \frac{t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} - a_E^{\max})} |Z_P(t_0)| \\ |Z_Q(t_0)| &< \frac{1}{2} t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max}) \end{aligned} \right. \right\}. \\ Q_1 &= \left\{ (Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) \left| \begin{aligned} |Z_Q(t_0)| &< \frac{t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} - a_E^{\max})} |Z_P(t_0)| \\ |Z_Q(t_0)| &< \frac{1}{2} t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max}) \end{aligned} \right. \right\}. \\ Q_3 &= \left\{ (Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) \left| \begin{aligned} |Z_Q(t_0)| &< \frac{1}{2} t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max}) \end{aligned} \right. \right\}. \end{aligned}$$

证明：当 $Z_P(t_{Pf})$ 和 $Z_Q(t_{Qf})$ 符号相同时，根据式(9)和(10)，得到飞行器 i 的初始零控脱靶量最优轨迹：

$$|Z_P(t_0)| = |Z_P(t_{Pf})| + t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} - a_E^{\max}) / 2; \quad (12)$$

$$|Z_Q(t_0)| = |Z_Q(t_{Qf})| + t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max}) / 2. \quad (13)$$

因此，2 枚飞行器的初始状态 $Z_P(t_0)$ 和 $Z_Q(t_0)$ 满足：

$$|Z_Q(t_0)| = \Gamma_1(t) |Z_P(t_0)|. \quad (14)$$

式中:

$$\Gamma_1(t) = \frac{|Z_Q(t_{Qf})| + t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max})/2}{|Z_P(t_{Pf})| + t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max})/2} \quad (15)$$

当 P 飞行器捕获机动目标, Q 飞行器没有成功捕获机动目标时, 根据定义 1、定义 2 和引理 1, 两飞行器的终端脱靶量需要满足 $|Z_Q(t_{Qf})| > 0$, $Z_P(t_{Pf}) = 0$ 。将其代入式(15)得到:

$$|Z_Q(t_0)| > t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max})/t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max})|Z_P(t_0)| \quad (16)$$

同时, 根据式(12), P 飞行器的初始状态 $Z_P(t_0)$ 需要满足:

$$|Z_P(t_0)| \leq \frac{1}{2} t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max}) \quad (17)$$

当 Q 飞行器捕获机动目标, P 飞行器没有成功捕获机动目标时, 2 枚飞行器的终端脱靶量需要满足 $Z_Q(t_{Qf}) = 0$, $|Z_P(t_{Pf})| > 0$ 。将其代入式(15)得到:

$$|Z_Q(t_0)| < \frac{t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max})}|Z_P(t_0)| \quad (18)$$

同时, 根据式(13), Q 飞行器的初始状态 $Z_Q(t_0)$ 需要满足:

$$|Z_Q(t_0)| \leq \frac{1}{2} t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max}) \quad (19)$$

因此, 定理 1 得证。多飞行器协同捕获空间的

$$\begin{aligned} & PQ_2 \\ \cup &= \left\{ (Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) \left| \begin{array}{l} |Z_Q(t_0)| \leq t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} + a_E^{\max})/t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max})|Z_P(t_0)| \\ |Z_Q(t_0)| \geq t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max})/t_{Pgo}^2(a_P^{\max} + a_E^{\max})|Z_P(t_0)| \end{array} \right. \right\} \\ & PQ_4 \end{aligned}$$

证明: 当 $Z_P(t_{Pf})$ 和 $Z_Q(t_{Qf})$ 符号不同时, 根据式(9)和(10), 飞行器 i 的初始零控脱靶量最优轨迹为:

$$|Z_P(t_0)| = |Z_P(t_{Pf})| + t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - (2\kappa - 1)a_E^{\max})/2; \quad (20)$$

$$|Z_Q(t_0)| = |Z_Q(t_{Qf})| + t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} + (2\kappa - 1)a_E^{\max})/2 \quad (21)$$

且 2 枚飞行器的初始状态满足:

$$|Z_Q(t_0)| = \Gamma_2(t)|Z_P(t_0)| \quad (22)$$

式中:

$$\Gamma_2(t) = \frac{|Z_Q(t_{Qf})| + t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} + (2\kappa - 1)a_E^{\max})/2}{|Z_P(t_{Pf})| + t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - (2\kappa - 1)a_E^{\max})/2} \quad (23)$$

当 P 飞行器捕获机动目标, Q 飞行器没有捕获机动目标时, 2 枚飞行器的终端脱靶量需要满足 $|Z_Q(t_{Qf})| > 0$, $Z_P(t_{Pf}) = 0$, 且对 $\forall \kappa \in [0, 1]$, 式(23)中的 $\Gamma_2(t)$ 关于 κ 是单调递增的, 当 $\kappa = 1$ 时, $\Gamma_2(t)$ 取值最大。根据式(23)可以得:

划分结果如图 2 第 1 象限和第 3 象限所示。

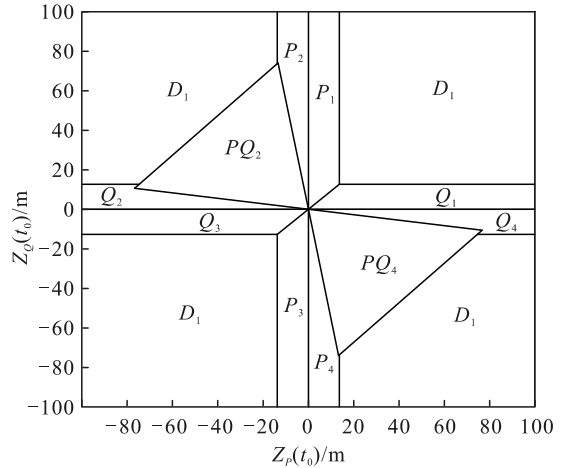


图 2 P 和 Q 飞行器的捕获空间分布

定理 2: 当 $Z_P(t_{Pf})$ 和 $Z_Q(t_{Qf})$ 符号不同时, P 飞行器捕获空间 $P_2 \cup P_4$, Q 飞行器捕获空间 $Q_2 \cup Q_4$ 和 PQ 飞行器协同捕获空间 $PQ_2 \cup PQ_4$ 分别为:

$$\begin{aligned} & P_2 \\ \cup &= \left\{ (Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) \left| \begin{array}{l} |Z_Q(t_0)| > \frac{t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} + a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max})}|Z_P(t_0)| \\ |Z_P(t_0)| < t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max})/2 \end{array} \right. \right\}; \\ & P_4 \\ & Q_2 \\ \cup &= \left\{ (Z_P(t_0), Z_Q(t_0)) \left| \begin{array}{l} |Z_Q(t_0)| < \frac{t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2(a_P^{\max} + a_E^{\max})}|Z_P(t_0)| \\ |Z_Q(t_0)| < t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max})/2 \end{array} \right. \right\}; \\ & Q_4 \end{aligned}$$

$$|Z_Q(t_0)| > \frac{t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} + a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max})}|Z_P(t_0)| \quad (24)$$

同时, 根据式(20), P 飞行器的初始状态 $Z_P(t_0)$ 需要满足:

$$|Z_P(t_0)| < t_{Pgo}^2(a_P^{\max} - a_E^{\max})/2 \quad (25)$$

当 Q 飞行器捕获机动目标, P 飞行器没有捕获机动目标时, 此时 2 枚飞行器的终端脱靶量需要满足 $|Z_P(t_{Pf})| > 0$, $Z_Q(t_{Qf}) = 0$, 且对 $\forall \kappa \in [0, 1]$, 当 $\kappa = 0$ 时, $\Gamma_2(t)$ 取值最小。根据式(23)可得:

$$|Z_Q(t_0)| < -\frac{t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2(a_P^{\max} + a_E^{\max})}|Z_P(t_0)| \quad (26)$$

同时, 根据式(21), Q 飞行器的初始状态 $Z_Q(t_0)$ 需要满足:

$$|Z_Q(t_0)| \leq t_{Qgo}^2(a_Q^{\max} - a_E^{\max})/2 \quad (27)$$

当 P 和 Q 飞行器单独对抗不能捕获机动目标，而能够协同捕获机动目标时，2 枚飞行器的终端脱靶量需要满足 $Z_Q(t_{Qf})=0$ ， $Z_P(t_{Qf})=0$ ，根据式(20)和(21)可求得：

$$|Z_Q(t_0) - Z_P(t_0)| \leq t_{Qgo}^2 (a_P^{\max} + a_Q^{\max}) / 2 \quad (28)$$

且根据式(23)， $\exists \kappa \in (0, 1)$ ，使得不等式

$$\frac{t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} + a_E^{\max})} \leq \frac{|Z_Q(t_0)|}{|Z_P(t_0)|} \leq \frac{t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} + a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} - a_E^{\max})} \quad (29)$$

成立，将式(29)进一步化简可得：

$$|Z_Q(t_0)| \leq \frac{t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} + a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} - a_E^{\max})} |Z_P(t_0)|; \quad (30)$$

$$|Z_Q(t_0)| \geq \frac{t_{Qgo}^2 (a_Q^{\max} - a_E^{\max})}{t_{Pgo}^2 (a_P^{\max} + a_E^{\max})} |Z_P(t_0)|. \quad (31)$$

因此，定理 2 得证。多飞行器协同捕获空间的划分结果如图 2 第 2 象限和第 4 象限所示。

3 仿真验证

以 2 枚飞行器 P 和 Q 在 2 维平面内的协同围捕为例，对图 2 中的捕获空间划分结果进行仿真验证。假设 2 枚飞行器从同一时刻发射，仿真参数设置如下：2 个飞行器 P 和 Q 与目标 E 的初始距离分别为 20 和 16 km，初始速度分别为 7、7 和 3 km/s，机动过载分别为 $a_P^{\max} = 2.7 \text{ gm/s}^2$ ， $a_Q^{\max} = 2.8 \text{ gm/s}^2$ ， $a_E^{\max} = 2 \text{ gm/s}^2$ 。

仿真场景 1：当 2 枚飞行器 P 和 Q 初始零控脱靶量分别为 10 和 50 m，该初始状态位于飞行器协同捕获空间分布如图 2 所示的 P_1 区域，通过仿真最终得到飞行器 P 和 Q 的脱靶量动态轨迹如图 3 所示。

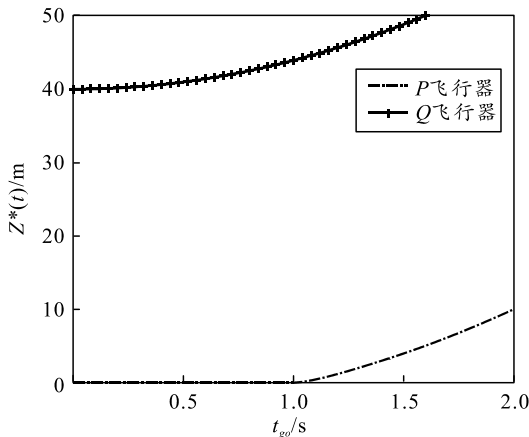


图 3 P 和 Q 飞行器的脱靶量动态轨迹

分析上图可知，两飞行器 P 和 Q 的终端脱靶量

分别为 $Z_P(t_{Pf})=0 \text{ m}$ ， $Z_Q(t_{Qf})=39.964 \text{ 8 m}$ ，满足 $|Z_P(t_{Pf})| < |Z_Q(t_{Qf})|$ 且 $\lim_{t \rightarrow t_{Pf}} Z_P(t)=0$ 的要求；因此可以得出结论，理想情况下，在 P_1 捕获空间内， P 飞行器最终能够实现对目标的成功捕获。

仿真场景 2：当 2 枚飞行器 P 和 Q 的初始零控脱靶量分别为 -100 和 10 m，该初始状态位于飞行器协同捕获空间分布如图 2 所示的 Q_2 区域，通过仿真得到飞行器 P 和 Q 的脱靶量动态轨迹如图 4 所示。

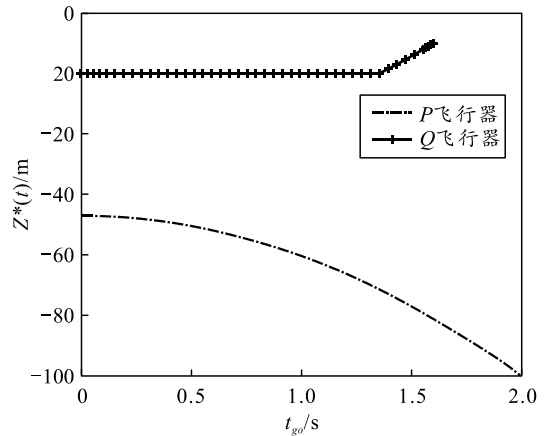


图 4 P 和 Q 飞行器的脱靶量动态轨迹

分析上图可知，两飞行器 P 和 Q 的终端脱靶量为 $Z_P(t_{Pf})=-47.080 \text{ 0 m}$ ， $Z_Q(t_{Qf})=0 \text{ m}$ ，满足 $|Z_Q(t_{Qf})| < |Z_P(t_{Pf})|$ 且 $\lim_{t \rightarrow t_{Qf}} Z_Q(t)=0$ 的要求；因此可以得出结论，理想情况下，在 Q_2 捕获空间内， Q 飞行器最终能够实现对目标的成功捕获。

仿真场景 3：当 2 枚飞行器 P 和 Q 的初始零控脱靶量分别为 20、-20 以及 -50、30 m，该初始状态分别位于飞行器协同捕获空间分布如图 2 所示的 PQ_4 和 PQ_2 区域，通过仿真得到飞行器 P 和 Q 的脱靶量动态轨迹如图 5 和 6 所示。

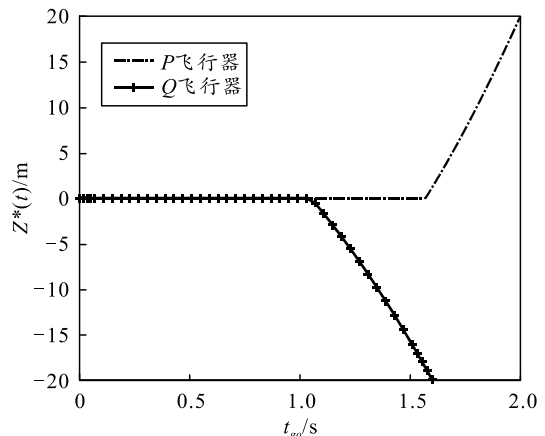


图 5 P 和 Q 飞行器的脱靶量动态轨迹

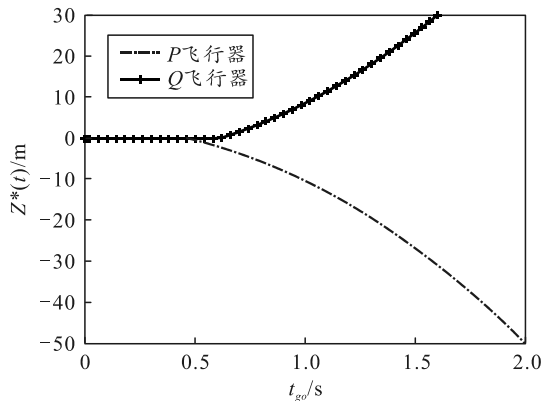


图 6 P 和 Q 飞行器的脱靶量动态轨迹

分析图 5 和 6 可知, 在 2 种不同的初始零控脱靶量条件下, 两飞行器 P 和 Q 的终端脱靶量均分别为 $Z_P(t_{Pf}) = 0 \text{ m}$, $Z_Q(t_{Qf}) = 0 \text{ m}$, 满足两飞行器协同捕获机动目标的要求; 因此可以得出结论: 理想情况下, 在 PQ_4 和 PQ_2 捕获空间内, P 和 Q 飞行器最终能够实现对目标成功捕获。按照相同的分析思路, 也可以验证图 2 中其他飞行器分布空间划分结果的准确性。

4 结束语

1) 针对多飞行器协同围捕问题, 考虑了协同围捕性能要求, 选择了 1 个合理的性能函数, 给出了微分对策协同制导律。

2) 对于多飞行器协同围捕空间结构的划分问题, 提出一种多飞行器协同捕获空间划分的方法, 证明了协同围捕的优势。

参考文献:

[1] 赵恩娇, 杨明, 晁涛, 等. 通信拓扑切换下的多飞行器协同拦截方法[J]. 宇航学报, 2019, 40(6): 646-654.

[2] CHANG K R, HANG J C, MIN J, et al. Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2005, 28(4): 724-732.

[3] 程涛, 周浩, 董晓飞, 等. 多飞行器突防打击一体化微分对策制导律设计[J/OL]. 北京航空航天大学学报, 2021: 1-18. <https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2020.0673>.

[4] ZHAO S Y, ZHOU R. Cooperative guidance for multimissile salvo attack[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(6): 533-539.

[5] 于江龙, 董希旺, 李清东, 等. 基于微分对策的拦截机动目标协同制导方法[J]. 指挥与控制学报, 2020, 6(3): 217-222.

[6] 陈治湘. 多导弹协同拦截若干关键技术研究[D]. 西安:

空军工程大学, 2008.

[7] 时晨光, 董璟, 周建江, 等. 飞行器射频隐身技术研究综述[J]. 系统工程与电子技术, 2021, 43(6): 1452-1467.

[8] 赵建博, 杨树兴. 多导弹协同制导研究综述[J]. 航空学报, 2017, 38(1): 17-29.

[9] 温广辉, 周佳玲, 吕跃祖, 等. 多导弹协同作战中的分布式协调控制问题[J]. 指挥与控制学报, 2021, 7(2): 137-145.

[10] JEON I S, LEE J I, TANK M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(2): 260-266.

[11] LEE J I, JEON I S, TANK M J. Guidance law to control impact time and angle[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 301-310.

[12] HARL N, BALAKRISHNAN S N. Impact time and angle guidance with sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(6): 1436-1449.

[13] SUTTON D. Guidance Laws for Anti-Ship Missiles Using Impact Angle and Impact Time[C]//AIAA Guidance Navigation and Control Conference and Exhibit. 2006: 273-286.

[14] ZHOU J, YANG J. Cooperative simultaneous attack with multiple missiles under leader-follower communication graphs[C]//2016 35th Chinese Control Conference(CCC). 2016: 7763-7768.

[15] ZHOU J, LYU Y, YANG J. Cooperative guidance law design for simultaneous attack with multiple missiles under directed communication topologies[C]//2017 International Workshop on Complex Systems and Networks(IWCSN). 2017: 313-318.

[16] MCLAIN T W, BEARD R W. Coordination Variables, Coordination Functions, and Cooperative Timing Missions[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2005, 28(1): 150-161.

[17] BEARD R W, MC LAIN T W, NELSON D B, et al. Decentralized cooperative aerial surveillance using fixed-wing miniature UAVs[J]. Proceedings of the IEEE, 2006, 94(7): 1306-1324.

[18] 张帅, 朱东方, 孙俊, 等. 双拦截弹拦截单目标边界型微分对策制导律研究[J]. 飞控与探测, 2019, 2(2): 46-53.

[19] 胡建. 大气层外多拦截器最优目标分配及微分对策协同制导律研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.

[20] 周军, 郭建国, 张添保. 基于前向补偿的再入飞行器制导控制一体化设计[J]. 飞控与探测, 2018, 1(1): 48-54.

[21] SHAFERMAN V, SHIMA T, SHIMA T Y. Cooperative differential game for imposing a relative intercept angle[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2017, 40(1): 1-16.