

doi: 10.7690/bgzdh.2024.01.012

风洞试验模型姿态精确计算

姜金俊¹, 陈连忠¹, 徐 芮²

(1. 中国航天空气动力技术研究院第二研究所, 北京 100074;

2. 北京新风航天机械装备有限公司生产处, 北京 100043)

摘要: 针对传统姿态角计算存在计算复杂和不准确的问题, 根据理论和工程实践方法, 建立向量角度坐标系, 给出不同飞行姿态坐标系之间的变换与角度定义关系, 能够精确计算出对应坐标系姿态角大小, 并判定其方向, 尤其在通道耦合计算时, 使得坐标系间的姿态角计算只跟角度有关系, 而跟坐标系变化次序没有关系。结果表明: 该方法能简化计算过程, 解决风洞实验和飞行器运动过程中姿态角求解复杂、误差大的问题。

关键词: 姿态角; 角度向量坐标系; 迭代计算; 球面坐标系; 风洞试验

中图分类号: V416.1 **文献标志码:** A

Model Attitude Calculation in Wind Tunnel Test

Jiang Jinjun¹, Chen Lianzhong¹, Xu Rui²

(1. The Second Institute of Aerospace Aerodynamics of China Academic, Beijing 100074, China;

2. Production Division of Beijing Xin-Feng Aerospace Machinery Equipment Co., Ltd., Beijing 100043, China)

Abstract: Aiming at the problems of complex and inaccurate calculation of traditional attitude angle calculation procession, the vector angle coordinate system is established according to the theory and engineering practice method, and the transformation and angle definition relationship between different flight attitude coordinate systems is given, which can accurately calculate the poseangle size of the corresponding coordinate system and determine its direction, especially in the channel coupling calculation, so that the attitude angle calculation between the coordinate systems is only related to the angle, but not to the order of the coordinate system change diange. The results show that this proposed method simplifies the calculation process and solve the problem of complex and large error in attitude angle solving during in wind tunnel test and aircraft motion.

Keywords: attitude angle; angle vector coordinate system; iterative calculation; spherical coordinate system; wind tunnel test

0 引言

风洞试验数据计算时, 模型姿态角的计算准确性对计算结果影响很大, 是风洞试验数据处理和提高精度的重要环节。恽起麟^[1]提到对于 GMB-04 模型在跨、超音速, $\alpha=4^\circ$ 时阻力系数 C_x 的误差 25% 以上是由于迎角误差引起的。对于亚音速运输机模型, 巡航状态 $C_y \approx 0.50$, 若天平、压力测量均没有误差, 阻力系数误差 $\Delta C_x = \pm 0.000 1$ 所对应的迎角误差 $\Delta \alpha = \pm 0.01^\circ$, 在远程巡航中将改变 1% 的有效载荷。实际上天平、压力测量均存在误差; 因此, 要达到 $\Delta C_x = \pm 0.000 1$, 所能分配给迎角的误差 $\Delta \alpha$ 必须小于 0.01° ^[2]。目前, 国内模型实验的迎角误差一般为 $\pm 0.05^\circ$, 模型的弹性角由天平测得的升力和俯仰力矩代入弹性角计算公式而得, 误差较大 ($\Delta \alpha \geq 0.02$), 已经满足不了高精度实验数据的要求^[2-4]。国外风洞实验已较普遍地在模型内安装迎角传感器, 直接测

量模型在气动力作用下的真实迎角 (包含模型弹性角), 迎角传感器的阈值为 $0.001^\circ \sim 0.003^\circ$, 精度可以达到 0.01° ^[5-6]。美国波音公司跨音速风洞采用激光角仪测量模型姿态角, 其迎角测量精度可达 $\pm 0.005^\circ$ ^[7-8], 比我国的迎角误差 ± 0.05 要小一个量级。目前, 我国风洞还没有在模型中安装角度传感器的案例, 且因为角度传感器成本高, 模型设计较为不便, 其应用并不广泛^[9]。

在模型安装时, 安装角误差及弹性角误差相互叠加影响下, 且没有专门的装置测量各分量姿态角, 天平系统各分量之间的相互影响就无法考虑。在大攻角大量程时, 这种影响会更大, 尤其在大气动力作用下俯仰 α , 侧滑 β , 滚转 γ 之间的相互干扰也会增大^[10]; 因此, 研究天平系统坐标轴系转换过程中姿态角的精确计算方法十分必要。

欧拉角描述飞行器姿态角时, 方法简单, 物理

收稿日期: 2023-09-16; 修回日期: 2023-10-19

第一作者: 姜金俊 (1980—), 男, 北京人, 博士。

意义直观，但对于飞航式飞行器时，当俯仰角接近时会出现奇异点，从而使描述姿态运动的欧拉角微分方程发散；因此，在实际求解飞行器姿态角时常用方向余弦和四元素法，根据欧拉角关系求解，但是在坐标系转换，姿态角计算误差会不断积累，从而导致计算误差增大^[11]。

根据球面坐标系转换过程中姿态角计算存在的问题，笔者建立向量角度坐标系，解决风洞实验和飞行器运动过程中，姿态角求解复杂，误差大的问题。

1 球面坐标系计算方法

空间任何一个几何体都是由许多平面(或直线)相交形成的。由于两平面(或直线)的夹角大小，不因平面(或直线)同时平移后的位置不同而改变；因此，可以把组成空间角度的平面(或直线)都平移到球面坐标的球心，并与该球面截交，得到球面上若干个球面三角形，绘制出球面图，球面图中的所有角度都具有“存真性”，然后借用球面三角公式进行计算，这种方法称为球面坐标法^[11-13]。

首先进行坐标系定义，如图 1 所示：风轴系用 $X_1、Y_1、Z_1$ 表示；天平坐标系用 $X'、Y'、Z'$ 表示；风洞轴系(地面轴系)用 $X、Y、Z$ 表示；模型坐标系用 $X_b、Y_b、Z_b$ 表示；姿态角用 $\alpha、\beta、\gamma$ 表示；天平弹性角用 $\Delta\alpha_e、\Delta\beta_e、\Delta\gamma_e$ 表示；名义姿态角用 $\alpha_m、\beta_m、\gamma_m$ 表示； $\Delta\alpha_r$ 表示气流偏斜角^[2,8,14-15]。

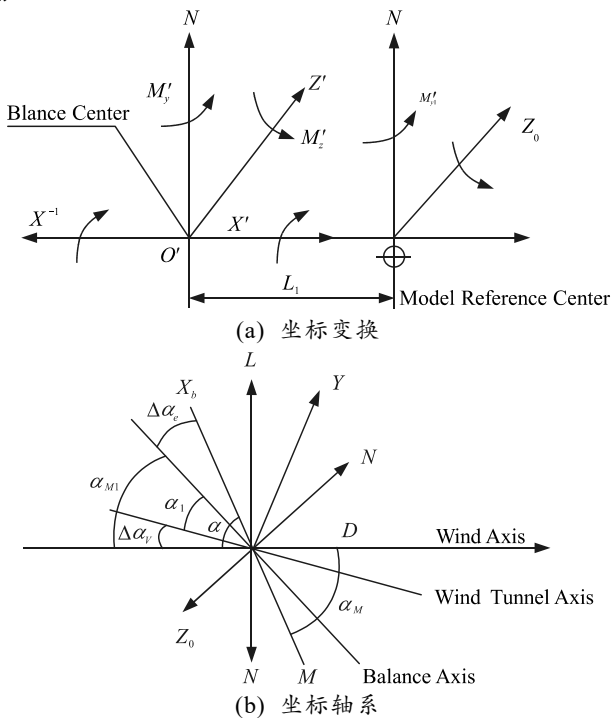


图 1 轴系坐标转换

以横轴试验为例：范洁川等^[2]对模型滚转 γ 、模型预偏侧滑角试验、双转轴试验的计算过程进行了详细推导。以模型预制转滚转角 γ 横向试验各坐标轴系气动力计算为例，进行模型体轴系气动力计算^[16]。

1.1 模型体轴系气动力的计算

若天平以地轴系静态校准，略去天平及支杆的弹性变形影响(不考虑天平弹性变形角)，或天平以体轴系静校，其天平测得的气动力和力矩转到体轴的转换关系，如图 2 所示。

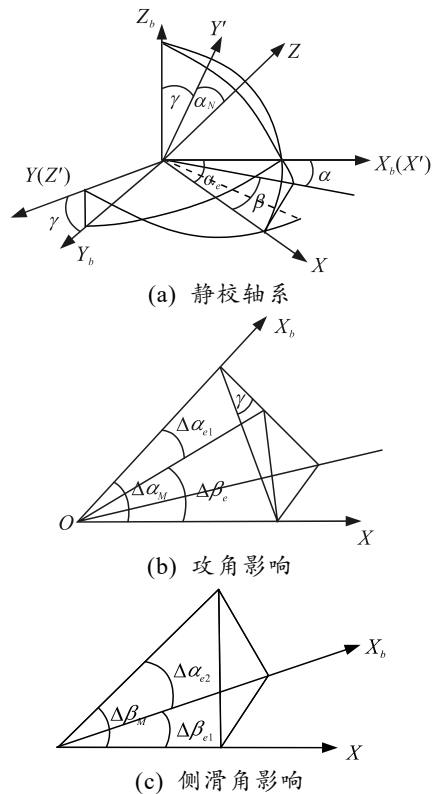


图 2 转 γ 角横向试验的角度关系

法向力：

$$N = Y' \cos \gamma + Z' \sin \gamma ; \tag{1}$$

横向力：

$$Y = Z' \cos \gamma - Y' \sin \gamma ; \tag{2}$$

轴向力：

$$A = X' l = X' - \Delta X_b ; \tag{3}$$

俯仰力矩：

$$M_b = M'_{z1} \cos \gamma - M'_{y1} \sin \gamma ; \tag{4}$$

偏航力矩：

$$N_b = -M'_{y1} \cos \gamma - M'_{z1} \sin \gamma ; \tag{5}$$

滚转力矩：

$$L_b = M'_{x1} = M'_x + Z' \Delta l_N . \tag{6}$$

1.2 模型迎角和侧滑角增量计算

当天平系统受到模型气动力作用后产生弹性变形, 设在天平坐标轴系中产生的弹性变形角分别为 $\Delta\alpha_m$ 、 $\Delta\beta_m$ 和 $\Delta\gamma_m$ 。由于模型相对天平旋转了一个 γ 角, 对应模型对称面内也有一个迎角增量 $\Delta\alpha_e$, 对应侧滑平面内有一个侧滑角增量 $\Delta\beta_e$ 。因 $\Delta\gamma_m$ 角影响很小, 通常均忽略不计。由 $\Delta\alpha_m$ 产生模型迎角和侧滑角增量分别为 $\Delta\alpha_{e1}$ 和 $\Delta\beta_{e1}$, 由 $\Delta\beta_m$ 产生的模型侧滑角增量分别为 $\Delta\alpha_{e2}$ 和 $\Delta\beta_{e2}$, 模型迎角和侧滑角的增量分别为:

$$\Delta\alpha_e = \Delta\alpha_{e1} + \Delta\alpha_{e2}; \quad (7)$$

$$\Delta\beta_e = \Delta\beta_{e1} + \Delta\beta_{e2}。 \quad (8)$$

从图 2(b)、(c)可知:

$$\begin{aligned} \text{tg}\Delta\alpha_{e1} &= \text{tg}\Delta\alpha_m \cos\gamma; & \sin\Delta\beta_{e1} &= \sin\Delta\alpha_m \sin\gamma; \\ \text{tg}\Delta\alpha_{e2} &= -\text{tg}\Delta\beta_m \sin\gamma; & \sin\Delta\beta_{e2} &= \sin\Delta\beta_m \cos\gamma。 \end{aligned} \quad (9)$$

式中, $\Delta\alpha_{e1}$ 、 $\Delta\beta_{e1}$ 、 $\Delta\alpha_{e2}$ 、 $\Delta\beta_{e2}$ 分别为:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{e1} &\approx \arctg(\text{tg}\Delta\alpha_m \cos\gamma); \\ \Delta\beta_{e1} &\approx \arcsin(\sin\Delta\alpha_m \sin\gamma); \\ \Delta\alpha_{e2} &\approx -\arctg(\text{tg}\Delta\beta_m \sin\gamma); \\ \Delta\beta_{e2} &\approx \arcsin(\sin\Delta\beta_m \cos\gamma)。 \end{aligned} \quad (10)$$

因为 $\Delta\alpha_m$ 、 $\Delta\beta_m$ 角很小, 上式可简化为:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{e1} &\approx \Delta\alpha_m \cos\gamma; & \Delta\beta_{e1} &\approx \Delta\alpha_m \sin\gamma; \\ \Delta\alpha_{e2} &\approx -\Delta\beta_m \sin\gamma; & \Delta\beta_{e2} &\approx \Delta\beta_m \cos\gamma。 \end{aligned} \quad (11)$$

将式(10)、(11)代入式(7)、(8)得:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_e &= \Delta\alpha_m \cos\gamma - \Delta\beta_m \sin\gamma; \\ \Delta\beta_e &= \Delta\beta_m \cos\gamma + \Delta\alpha_m \sin\gamma。 \end{aligned} \quad (12)$$

1.3 模型迎角和侧滑角计算

模型转 γ 角、迎角机构变角度 α_m , 参考图 1(b) 同样可得到模型的迎角 α_{m1} 和侧滑角 β_{m1} 与式(9)相似的关系式:

$$\text{tg}\alpha_{m1} = \text{tg}\alpha_m \cos\gamma; \quad \sin\beta_{m1} = \sin\alpha_m \sin\gamma。 \quad (13)$$

则 α_{m1} 、 β_{m1} 分别为:

$$\alpha_{m1} = \arctg(\text{tg}\alpha_m \cos\gamma); \quad \beta_{m1} = \arcsin(\sin\alpha_m \sin\gamma)。 \quad (14)$$

模型的迎角 α 与侧滑角 β 为:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{m1} + \Delta\alpha_e = \\ &\arctg(\text{tg}\alpha_m \cos\gamma) + \Delta\alpha_m \cos\gamma - \Delta\beta_m \sin\gamma; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_{m1} + \Delta\beta_e = \\ &\arcsin(\sin\alpha_m \sin\gamma) + \Delta\beta_m \cos\gamma + \Delta\alpha_m \sin\gamma。 \end{aligned} \quad (16)$$

上述计算过程中, 假设 $\sin\Delta \approx \Delta$, $\tan \approx \Delta$, 在 Δ 较小时, 误差不会影响计算结果, 但在角度增大时将会很大程度影响计算结果。尤其在双轴试验时, 从球面坐标系转换中很难找到风轴系姿态角和与模型坐标系姿态角的对应关系。且每次转换都需要一次反三角函数的近似计算。

2 向量角度坐标系建立及其转换

定义数域 F 上线性空间 V 中有 3 个线性无关向量 $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 、 $\vec{\gamma}$ (分别表示俯仰、侧滑和滚转 3 个角度向量), $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 、 $\vec{\gamma}$ 相互垂直, 以 $|\alpha|$ 、 $|\beta|$ 、 $|\gamma|$ 表示其大小, 以坐标 (k_1, k_2, k_3) 表示其方向矢量, 则 $\vec{\alpha} = |\alpha|(0, 0, 1)$, $\vec{\beta} = |\beta|(0, 1, 0)$, $\vec{\gamma} = |\gamma|(1, 0, 0)$, 建立如图 3 所示角度向量坐标系。设滚转 $\vec{\gamma}$ 大小改变了正 $\Delta\gamma$, 则向量 $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 绕 $\vec{\gamma}$ 旋转了 $\Delta\gamma$, 符合右手定则, 得到新的坐标系 $\vec{\alpha}'$ 、 $\vec{\beta}'$ 、 $\vec{\gamma}'$ 如图 4 所示^[17-18]。

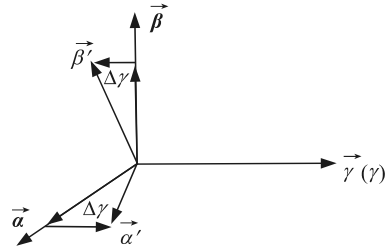


图 3 向量角度坐标系

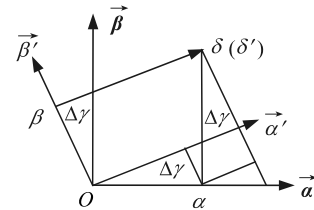


图 4 向量角度转换

设 δ 为线性空间 V 中的任意向量, 则:

$$\delta = k_1 \vec{\gamma} + k_2 \vec{\beta} + k_3 \vec{\alpha} = (\vec{\gamma}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}。 \quad (17)$$

当 $\vec{\gamma}$ 大小改变了正 $\Delta\gamma$ 时相当于坐标系基的线性变换, 设变换为 $P(\gamma)$, 根据向量转换定义由图 4 可得:

$$\begin{aligned} O\beta' &= O\beta \cos\Delta\gamma + O\alpha \sin\Delta\gamma; \\ O\alpha' &= O\alpha \cos\Delta\gamma - O\beta \sin\Delta\gamma。 \end{aligned} \quad (18)$$

写成矩阵形式:

$$\delta' = \begin{bmatrix} \cos\Delta\gamma & \sin\Delta\gamma \\ -\sin\Delta\gamma & \cos\Delta\gamma \end{bmatrix} \delta。 \quad (19)$$

则 3 维空间下:

$$\delta' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\gamma & \sin\Delta\gamma \\ 0 & -\sin\Delta\gamma & \cos\Delta\gamma \end{bmatrix} \delta。 \quad (20)$$

根据基变换和坐标变换定理:

$$(\vec{\gamma}', \vec{\beta}', \vec{\alpha}') = (\vec{\gamma}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}) P(\gamma); \quad (21)$$

$$\delta = (\bar{\gamma}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = (\bar{\gamma}', \bar{\beta}', \bar{\alpha}') \begin{bmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \end{bmatrix}; \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = P(\gamma) \begin{bmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

推出：

$$p(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (24)$$

同理推导出：

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (25)$$

$$P(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (26)$$

根据图 4 向量角度坐标系，当天平由于弹性角影响产生 $\Delta\gamma$ 时，相当于天平坐标系与模型坐标系经过了 $p(\gamma)$ 变换，可得模型坐标系各向量为：

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = P(\gamma) \begin{bmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

式中 k_1, k_2, k_3 分别为向量与坐标系对应的夹角的余弦值，如 $\bar{\beta} = |\beta| [0, 1, 0]$ ，变换 $\Delta\gamma$ 后：

$$[\gamma_b \ \beta_b \ \alpha_b]_{\gamma-\beta-\alpha}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_m & -\sin \gamma_m \\ 0 & \sin \gamma_m & \cos \gamma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_m & 0 & \sin \beta_m \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_m & 0 & \cos \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m & 0 \\ \sin \alpha_m & \cos \alpha_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\gamma_e + \gamma_m| & 0 & 0 \\ 0 & |\beta_e + \beta_m| & 0 \\ 0 & 0 & |\alpha_e + \alpha_m| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_m \cos \alpha_m & -\cos \beta_m \sin \alpha_m & \sin \beta_m \\ \sin \gamma_m \sin \beta_m \cos \alpha_m + \cos \gamma_m \sin \alpha_m & -\sin \alpha_m \sin \gamma_m \sin \beta_m + \cos \gamma_m \cos \alpha_m & -\sin \gamma_m \cos \beta_m \\ \sin \gamma_m \sin \alpha_m - \sin \beta_m \cos \gamma_m \cos \alpha_m & \sin \alpha_m \sin \beta_m \cos \gamma_m + \sin \gamma_m \cos \alpha_m & \cos \beta_m \cos \gamma_m \end{bmatrix}; \quad (33)$$

$$P = P(\gamma_m)P(\beta_m)P(\alpha_m) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta_m \cos \alpha_m & -\cos \beta_m \sin \alpha_m & \sin \beta_m \\ \sin \gamma_m \sin \beta_m \cos \alpha_m + \cos \gamma_m \sin \alpha_m & -\sin \alpha_m \sin \gamma_m \sin \beta_m + \cos \gamma_m \cos \alpha_m & -\sin \gamma_m \cos \beta_m \\ \sin \gamma_m \sin \alpha_m - \sin \beta_m \cos \gamma_m \cos \alpha_m & \sin \alpha_m \sin \beta_m \cos \gamma_m + \sin \gamma_m \cos \alpha_m & \cos \beta_m \cos \gamma_m \end{bmatrix}. \quad (34)$$

式中 P 的 3 个列向量分别表示模型姿态的基坐标轴。目前计算风轴系姿态角的方法有球面坐标系法和转换矩阵法 2 种。球面坐标系法转化复杂，在进行第 3 次坐标转换时，很难想象出坐标之间的关系；转换矩阵法认为从航迹坐标系-风轴系-稳定系-模

$$\bar{\beta}' = P(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (28)$$

由此可得 $P(\gamma)$ 的列向量分别表示转换后的基坐标的 3 个单位向量，则有：

$$[\gamma \ \beta \ \alpha]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_m & -\sin \gamma_m \\ 0 & \sin \gamma_m & \cos \gamma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\gamma_m| & 0 & 0 \\ 0 & |\beta_m| & 0 \\ 0 & 0 & |\alpha_m| \end{bmatrix}. \quad (29)$$

模型预置滚转 γ_m 角试验，相当于模型坐标系基相对于风洞坐标系基进行了 γ_m 轴和 $P(\gamma_m)$ 变换：

$$[\gamma_1 \ \beta_1 \ \alpha_1]_{\gamma}^T = P(\gamma_m) \text{diag}(|\gamma_m| \ 1 \ 1). \quad (30)$$

当模型同时预置侧滑角 β_m 时，相当于天平坐标系基和模型坐标系基绕风洞坐标系基进行了 $P(\beta_m)$ 变换，则：

$$[\gamma_2 \ \beta_2 \ \alpha_2]_{\gamma-\beta}^T = P(\gamma_m)P(\beta_m)P^{-1}(\gamma_m)[\gamma_1 \ \beta_1 \ \alpha_1]_{\gamma}^T = P(\gamma_m)P(\beta_m) \text{diag}[|\gamma_m| \ |\beta_m| \ 1]. \quad (31)$$

当迎角 α 变化时，相当于天平坐标系基和模型坐标系基绕风洞坐标系基 α 轴进行 $P(\alpha)$ 变换，则

$$[\gamma_b \ \beta_b \ \alpha_b]_{\gamma-\beta-\alpha}^T = P(\gamma_m)P(\beta_m)P(\alpha_m)P^{-1}(\beta_m)P^{-1}(\gamma_m)[\gamma_1 \ \beta_1 \ \alpha_1]_{\gamma}^T = P(\gamma_m)P(\beta_m)P(\alpha_m) \text{diag}[|\gamma_m| \ |\beta_m| \ |\alpha_m|]; \quad (32)$$

型坐标系的转换矩阵与地面系到模型坐标系的转换矩阵相等，矩阵有 9 个方程、3 个参数，存在多解或无解的情况。如当 $\alpha_m=60^\circ$ 、 $\beta_m=-30^\circ$ 、 $\gamma_m=26^\circ$ 时，利用不同方程组可能求得不同的姿态角^[19-21]。

矩阵方程计算结果对比如表 1 所示。

表 1 矩阵方程计算结果对比

矩阵方程	α	β	γ
Matrix	54.941 265 28	5.779 129 78	38.523 309 86
Equation1	59.904 580 57	9.680 485 96	62.063 655 34
Equation2	54.941 265 23	-6 465.285 189 14	38.523 309 85

采用向量坐标系方法可以精确求得模型风轴系的姿态角。根据风轴系 γ_s 、 β_s 、 α_t 的定义， α_t 为速度矢量在飞行器对称面投影与 γ_b 的夹角， β_s 为速度矢量与飞行器对称面的夹角， γ_s 为在飞行器对称面内且垂直于速度矢量的 α_w 与包含速度矢量的铅垂面 $o\alpha\gamma$ 面的夹角。如图 5 所示， γ 、 β 、 α 表示风轴基坐标系， γ_b 、 β_b 、 α_b 表示模型基坐标系， β_{α} 、 β_{γ} 分别表示向量 β 与基坐标轴的夹角^[14-15,22]。

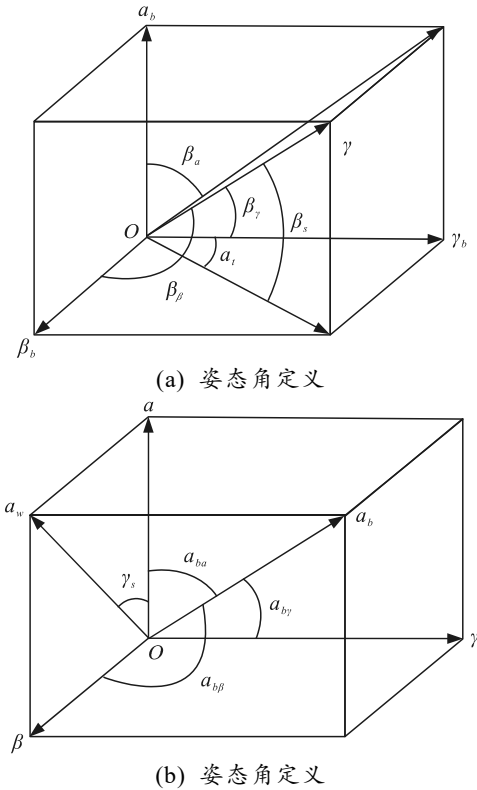


图 5 姿态角转换定义

利用三角函数推导得到：

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \arctan(\gamma_\beta / \gamma_\gamma); \\ \beta_s &= 90 - \arccos(\gamma_\alpha); \\ \gamma_s &= \arctan(\alpha_\beta / \alpha_\alpha). \end{aligned} \quad (35)$$

根据 P 公式得：

$$\cos(\gamma_\gamma) = \cos \beta_m \cos \alpha_m; \quad (36)$$

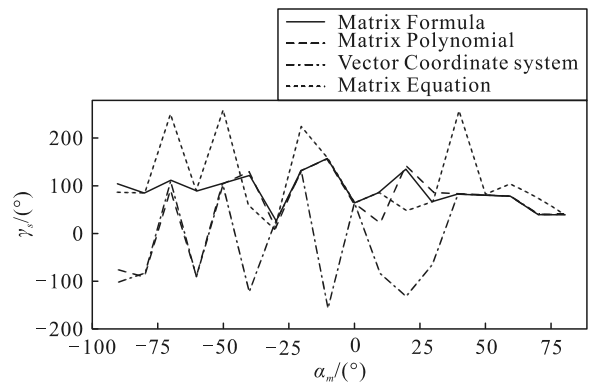
$$\cos(\gamma_\beta) = \sin \gamma_m \sin \beta_m \cos \alpha_m + \cos \gamma_m \sin \alpha_m; \quad (37)$$

$$\cos(\gamma_\alpha) = \sin \gamma_m \sin \alpha_m - \sin \beta_m \cos \gamma_m \cos \alpha_m. \quad (38)$$

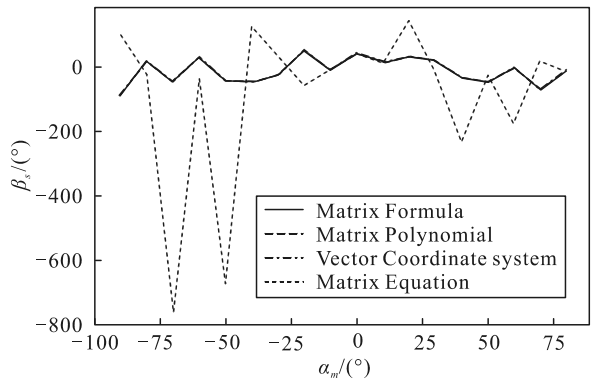
由此在计算 α_t 、 β_s 、 γ_s 时，避免了三角值近似求解和迭代过程中的反三角函数求解问题，给出了 α_t 、 β_s 、 γ_s 的大小和方向。

3 计算结果分析

取 $\gamma_m = -180^\circ \sim 180^\circ$ 任意值， $\alpha_m = -90^\circ \sim 90^\circ$ 之间 5° 间隔顺序取值， $\beta_m = -90^\circ \sim 90^\circ$ 任意取值。利用向量角度坐标系方法，计算结果如图 6 所示。其中，点划线、短划线、虚线分别表示矩阵等式、多项式求解及球面转换公式计算结果， β_m 、 α_m 取值范围 $> 90^\circ$ 或 $< -90^\circ$ 时，3 种方法会使结果产生正负误差，且 γ_m 产生一定量的误差。实线表示角度向量计算方法，图 6 表明，该方法可以精确计算风轴系各个姿态角，保证 α_m 、 β_m 、 γ_m 在上述取值范围内转换矩阵每一个方程相等，避免了多解、奇异解等问题，并且能够精确判断角度方向。根据计算结果发现，利用转换矩阵等式求解法，选择 α_m 、 γ_m 向量相关的基坐标可以同样计算出 α_t 、 β_s 、 γ_s 大小，但是不能判断其方向。目前，风洞试验可以进行 $\gamma_m \sim \alpha_m (\beta_m = 0)$ 和 $\beta_m \sim \alpha_m (\gamma_m = 0)$ 试验，试验过程相当于进行了一次变换，求解过程相同。在进行 γ_m 、 $\beta_m \sim \alpha_m$ 试验时，利用球面法很难推导出相互关系式，且由于 γ 取值范围在 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 之间，使得计算结果不准确。利用角向量坐标系，只要给出 γ_m 、 β_m 、 α_m 向量，就可以精确计算 γ_s 、 β_s 、 α_t 向量，确定其姿态。同时，如果把 γ_m 、 β_m 、 α_m 向量更换成 A、N、Z，则利用公式可以直接推导风轴系 L、D、C 各方向力。



(a) $\alpha_m - \gamma_s$ 计算结果对比



(b) $\alpha_m - \beta_s$ 计算结果对比

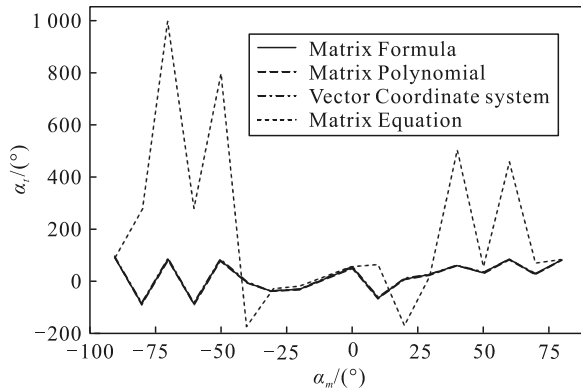
(c) $\alpha_m - \alpha_t$ 计算结果对比

图 6 程序计算结果对比

4 结论

笔者根据工程实践及向量相关理论，提出向量角度坐标系的概念，建立姿态角的向量角度坐标系，详细推导了计算过程，实现了模型姿态角到风轴系和航迹系姿态的角度转化。计算过程中避免了三角函数近似求解和迭代过程中反三角函数求解，并从理论上给出了各个坐标系之间姿态角的对应关系。不管从模型姿态到风轴系和航迹系如何变换，式(34)都成立。在飞行器姿态控制过程中可以直接利用式(34)求解 γ_γ , γ_β , γ_α 。在利用人工智能方法求解三通道融合控制策略时，也可以将式(34)作为损失函数，避免梯度下降法的局部最小和过度拟合问题。

参考文献：

- [1] 恽起麟. 提高风洞试验数据精度的方法[J]. 气动实验与测量控制, 1994, 8(3): 74-81.
- [2] 范洁川, 邵箭. 风洞试验手册[M]. 北京: 航空工业出版社, 2002: 490-550.
- [3] 王铁城, 主编. 空气动力学实验技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 1986: 71-74.
- [4] 中国航空工业总公司第 304 研究所. 数据采集系统校准规范: JJG 1048-1995[S]. 北京: 中国计量出版社, 1995: 3-21.
- [5] 中华人民共和国航空航天工业部. 地面计算机测控系

统输入输出子系统性能鉴定要求和办法: HB 6489-1991[S]. 北京: 中国标准出版社, 1991: 7-25.

- [6] 钱翼稷. 空气动力学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004: 123-199.
- [7] [美]艾伦·波普, 等, 著. 低速风洞试验[J]. 范洁川, 等, 译. 空气动力实验与研究, 1988(增刊): 45-89.
- [8] [美]艾伦·波普, 约翰·J 哈伯, 著. 低速风洞试验[M]. 鼓锡铭, 等, 译. 北京: 国防工业出版社, 1977: 37-112.
- [9] FL-1 实验分析手册编写组. FL-1 风洞试验分析手册[M]. 1985: 156-173.
- [10] 恽起麟, 主编. 风洞实验[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000: 77-93.
- [11] 范奎武, 张兵. 提高飞行器姿态角计算精度的方法研究[J]. 导航与控制. 2016, 15(6): 41-44.
- [12] 张万国. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 3-51.
- [13] HORNRA. 矩阵分析[M]. 杨奇, 译. 北京: 机械工业出版社, 2005: 11-71.
- [14] 颜大椿, 主编. 实验流体力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992: 25-44.
- [15] 恽起麟, 主编. 实验空气动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991: 112-119.
- [16] WANG Z J, YANG H Q. A Unified Conservative Zonal Interface Treatment for Arbitrarily Patched and Overlapped Grids[J]. AIAA Paper, 1994, 94: 0320.
- [17] HALL L, MITCHELL C, PARTHASARATHY V. An unsteady simulation technique for missile guidance and control applications[J]. AIAA Paper, 1997, 97: 0636.
- [18] 陈小安, 蒋沪生, 王永刚, 等. 机电产品计算机辅助一体化设计技术[J]. 兵工自动化, 1991(Z1): 8-11.
- [19] ZHOU N C. Missile separation simulation with control laws[J]. Acta aerodynamica sinica, 2013, 31(3): 288-293.
- [20] FLUENT user's guide[Z]. www.fluent.co, ANSYS, 2022: 6-31.
- [21] HEIM E R. CFD Wing/Pylon/Finned Store Mutual Interference Wind Tunnel Experiment[J]. cfd wing/pylon/finned store mutual interference wind tunnel experiment, 1991.
- [22] [苏]HA 查克斯, 著. 实验空气动力学原理[M]. 乔承禹, 译. 北京: 国防工业出版社, 1964: 22-27.