

doi: 10.7690/bgzdh.2024.06.012

# 改进 TOPSIS 的多属性决策方法

常青, 刘德生, 杨阳

(航天工程大学复杂电子系统仿真重点实验室, 北京 101416)

**摘要:** 针对逼近理想点排序法 (technique for order preference by similarity to ideal solution, TOPSIS) 存在的缺陷, 提出基于 Tanimoto 系数和基于对称差的 2 种改进 TOPSIS。改善或解决 TOPSIS 存在指标相关性、特殊样本集合无法比较优劣问题和样本数据动态变化时产生的逆序现象等缺陷; 在稳定性、特异性、敏感性和有效性 4 方面对经典 TOPSIS 模型、改进 Tanimoto 模型和改进对称差模型进行对比验证, 给出 2 种改进模型的适用场景。结果表明, 2 种方法各具有一定的优势。

**关键词:** 多属性决策; TOPSIS 法; Tanimoto 系数; 对称差

**中图分类号:** TP27 **文献标志码:** A

## Multiple Attribute Decision Making Method Based on Improved TOPSIS

Chang Qing, Liu Desheng, Yang Yang

(Science and Technology on Complex Electronic System Simulation Laboratory,  
Space Engineering University, Beijing 101416, China)

**Abstract:** Aiming at the defects of TOPSIS (technique for order preference by similarity to ideal solution), two improved TOPSIS methods based on Tanimoto coefficient and symmetric difference are proposed. Improve or solve TOPSIS index correlation problem, special sample set can not compare the advantages and disadvantages of the problem and the sample data dynamic changes in the reverse phenomenon and other defects; The classical TOPSIS model, the improved Tanimoto model and the improved symmetric difference model were compared and verified in terms of stability, specificity, sensitivity and validity, and the application scenarios of the two improved models were given. The results show that the two methods have their own advantages.

**Keywords:** multiple attribute decision making; TOPSIS method; Tanimoto coefficient; symmetric difference

### 0 引言

决策是人类最基本、最重要的能力, 人类生产生活、工作学习、起居饮食等所有的行为活动中都可见到它的影子。如何通过简单且高效的决策达成行动目的并实现效益的最优化, 是贯穿人类历史的难题。其中, 多属性决策问题 (multi-attribute decision making, MADM) 可定义为对于给定的一组方案 (离散, 有限), 决策者根据一组属性去衡量和判断各方案的属性值, 进而采用某种决策准则比较各方案, 对各方案进行排序择优<sup>[1]</sup>。多属性决策问题主要解决受多个属性或指标影响的有限方案排序或优选问题。在解决方法上, 常见的多属性决策方法有简单加权法、层次分析法、理想点法、线性规划法、逼近理想点排序法 (TOPSIS) 等。

TOPSIS 是一种常见且有效的多属性决策方法, 由 C.L.Hwang 等<sup>[2]</sup> 1981 年提出, 该方法的主要思想是通过计算各方案距离理论最优点和理论最劣点的

相对距离对方案进行优劣排序。TOPSIS 法的优势在于将多个彼此冲突的指标转化为 2 个准则, 即与正理想解的最短距离和与负理想解的最远距离<sup>[3]</sup>, 并且自身计算简便、客观性强、无应用领域限制; 因此, TOPSIS 法被广泛应用于项目管理<sup>[4]</sup>、绩效评价<sup>[5]</sup>、安全评估<sup>[6]</sup>、资源分配<sup>[7]</sup>等诸多领域。

TOPSIS 法也存在一些缺陷, 主要反映在依赖权重值的确定、欧式距离无法表示指标间的相关性、逆序现象等方面; 因此, 众多学者对 TOPSIS 法进行了相关的改进和应用研究。针对 TOPSIS 法指标权重依赖性强的问题, 李海君等<sup>[8]</sup>提出了将模糊层次分析法 (fuzzy analytical hierarchy process, FAHP) 和熵权法组合的方法, 虽然并没有改善 TOPSIS 法对指标权重的依赖性, 但使指标权重的确立更加合理。针对 TOPSIS 法中距离计算忽略指标间相关性的问题, 李琳<sup>[9]</sup>提出了利用马氏距离和余弦相似度代替 TOPSIS 中欧氏距离计算的方法, 并给出了 2 种不同改进方式的应用背景。L.H.Ho 等<sup>[10]</sup>采用

收稿日期: 2024-02-22; 修回日期: 2024-03-25

基金项目: 复杂电子系统仿真实验室基础研究项目 (DXZT-JC-ZZ-2020-006)

第一作者: 常青 (1997—), 男, 河北人, 硕士。

Pearson 相关系数代替欧式距离,在不同的毕达哥拉斯模糊 (interval-valued pythagorean fuzzy, IVPF) 集之间构建了有效的关联度量,并实现了决策方案的优劣排序。针对逆序现象,王颖君<sup>[11]</sup>认为 TOPSIS 法采用无量纲化的决策矩阵中选取最大或最小值的方式来构造正负理想值向量是缺乏稳定性的,当自身条件或评价环境发生变化时会导致排序的结果不具有唯一性,即逆序现象的产生。同时,王颖君提出了根据实际情况对评价对象进行定性分析,并将定性分析得到的理想值加权处理后作为新的正负理想值的方法,从而使评价过程具有唯一性,避免了逆序现象的产生。陈思博<sup>[12]</sup>在几何层面对逆序现象产生的机理进行了阐述,并提出了使用三角形面积代替距离计算和结合三角函数构建新的相似度代替距离计算 2 种改进方法,通过实例验证了改进的有效性。笔者针对以上缺陷,对经典 TOPSIS 模型进行改进,在不影响原本模型正确性的基础上,实现经典 TOPSIS 模型缺陷的改善或消减。

## 1 经典 TOPSIS 模型

### 1.1 原理概述

TOPSIS 是多属性决策方法,核心思想是通过对比样本方案与“理想解”和“负理想解”的相似度,将待评价样本进行排序,最优的决策方案满足距离“理想解”最近,同时距离“负理想解”最远。TOPSIS 中“理想解”与“负理想解”在候选方案中并不存在,是虚拟的最优方案和最劣方案,“理想解”中的指标是全候选方案各指标中最优的值;同样,“负理想解”中的指标也是全候选方案各指标中最劣的值。TOPSIS 通过对每个候选方案与虚拟的“理想解”和“负理想解”进行比较,从而获得方案的优劣排序。

TOPSIS 法与其他诸如简单加权法、层次分析法、理想点法、线性规划法等常见的多目标决策方法相比,具有以下优势:

1) 方法灵活。一些方法例如偏好顺序结构评估法 (preference ranking organization methods for enrichment evaluations, PROMETHEE) 需对指标进行两两比较,不适合处理指标数量较多的问题,而 TOPSIS 对可以处理的指标无数量上的限制。

2) 通过将多属性决策问题中涉及的多个属性指标转化为 2 个准则,即与正理想解和负理想解的相对距离,实现对不同方案的优劣排序,能更好地理解方案之间的差异。

3) 计算过程相对简单、步骤较少,对计算量要求不高。

4) 应用范围广,无特定的应用背景,适合各种领域的多属性决策问题。

这些优势使得 TOPSIS 被广泛应用于各类多目标决策研究中,并且在处理目标关系较为复杂、指标体系比较庞大的问题时, TOPSIS 也能发挥出较好的效果。

### 1.2 计算步骤

经典 TOPSIS 模型的计算步骤如下。

1) 规范化样本数据,消除量纲影响。设指标向量矩阵  $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ,去量纲化后的指标向量矩阵  $B=(b_{ij})_{m \times n}$ ,其中:

$$b_{ij} = a_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}, i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n。 (1)$$

2) 确定指标权重。采用适合的赋权方法,得到各指标的权重  $w=(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 。

3) 构建加权规范化矩阵。令  $x_{ij}=\omega_j b_{ij}, i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ ,则指标加权规范化矩阵  $X=\{x_{ij}\}_{m \times n}$ 。

4) 确定理想解  $X^*$  和负理想解  $X^0$ , 二者的第  $j$  个属性值分别为  $x_j^*$  和  $x_j^0$ , 则:

$$x_j^* = \begin{cases} \max_i x_{ij} & j \text{ 为效益型指标} \\ \min_i x_{ij} & j \text{ 为成本型指标} \end{cases} j=1,2,\dots,n; (2)$$

$$x_j^- = \begin{cases} \max_i x_{ij} & j \text{ 为成本型指标} \\ \min_i x_{ij} & j \text{ 为效益型指标} \end{cases} j=1,2,\dots,n。 (3)$$

5) 计算加权规范指标到理想解和负理想解的距离,第  $i$  个加权规范样本到理想解和负理想解的距离可表示为:

$$d_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_j^*)^2}, j=1,2,\dots,n; (4)$$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_j^-)^2}, j=1,2,\dots,n。 (5)$$

6) 计算各样本的相对贴适度,第  $i$  个样本的相对贴适度值为:

$$C_i = d_i^- / (d_i^- + d_i^*)。 (6)$$

7) 按照相对贴适度顺序确定方案的优劣顺序,相对贴适度越大,方案的排序越靠前。

### 1.3 方法缺陷

TOPSIS 法自身存在一些缺陷,主要体现在以

下方面：

1) 无法反映指标之间的相关性。由于计算欧式距离时，空间坐标系的各坐标轴为垂直关系，不同维度的指标间属于独立关系，故无法表现指标相关性。

2) 对于某些样本点，无法区分优劣。在空间坐标系中，满足到理想解与到负理想解的距离的比值，为定值的点集，无法通过 TOPSIS 法进行优劣判断，较为简易的例子是在 2 维样本中，理想解和负理想解连线中垂线上的点，到理想解与负理想解的距离都相同，无法区分优劣。

3) TOPSIS 法由于其自身方法的特性，在解决样本数据处于动态变化的多属性决策问题时经常会出现逆序现象，即当方案数量发生变化，方案的优劣排序也随之变化。

为改善上述问题，笔者提出以下方法对 TOPSIS 法进行改进：1) 引入 Tanimoto 系数代替欧式距离计算相似度；2) 引入对称差系数代替欧式距离计算相似度。

## 2 基于 Tanimoto 系数的改进 TOPSIS 模型

### 2.1 Tanimoto 系数概述

Tanimoto 系数也被称为广义 Jaccard 系数，可用来表示 2 组数据的相似度，设 2 个数组  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , Tanimoto 系数为：

$$t(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}. \quad (7)$$

向量表示形式为：

$$t(X, Y) = \frac{X \cdot Y}{|X|^2 + |Y|^2 - X \cdot Y}. \quad (8)$$

集合表示形式为：

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{|A \cap B|}{|A| + |B| - |A \cap B|}. \quad (9)$$

Tanimoto 系数的值越大，说明 2 数组的相似度越高。由 Tanimoto 系数的向量表达式可以看出，Tanimoto 系数中既包含向量长度的计算，也包含向量方向的计算；因此，使用 Tanimoto 系数进行计算时，能反映指标之间的相关性。同时，Tanimoto 系数通过在分母中减去 2 个向量中相同的部分，放大了向量间的差距；因此，与其他表示相似度的系数相比具有更好的敏感性。文献[13]针对面向区间数和不确定权重的多属性决策问题，提出了一种基于 Tanimoto 系数的改进 TOPSIS 方法，并根据实例初

步验证了基于 Tanimoto 系数的改进 TOPSIS 方法的有效性。

### 2.2 改进步骤

利用 Tanimoto 系数代替欧氏距离计算相似度，改进模型计算步骤的 1—4 步与经典 TOPSIS 模型一致，改进后的第  $i$  个加权规范样本到理想解的相似度  $t_i^*$  和到负理想解的相似度  $t_i^-$  可表示为：

$$t_i^* = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^*}{\left( \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^n (x_j^*)^2 - \sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^* \right)}, \quad j=1, 2, \dots, n; \quad (10)$$

$$t_i^- = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^-}{\left( \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^n (x_j^-)^2 - \sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^- \right)}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

与欧氏距离不同，Tanimoto 系数与样本相似度呈正相关；因此，改进 Tanimoto 模型中第  $i$  个样本的相对贴进度可表示为：

$$C_i = t_i^* / (t_i^- + t_i^*). \quad (12)$$

按照相对贴进度顺序确定方案的优劣顺序，相对贴进度越大，方案的排序越靠前。

## 3 基于对称差的改进 TOPSIS 模型

### 3.1 对称差概述

由 Tanimoto 系数的集合表示公式：

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{|A \cap B|}{|A| + |B| - |A \cap B|}. \quad (13)$$

可以得出，Tanimoto 系数主要通过对比同属于两集合中的元素来表示两集合之间的相似度关系，类似可通过对称差来表示两集合间的相似度关系。

对称差相当于 2 个集合的并集减去它们的交集，即：

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B). \quad (14)$$

可通过对称差来表示 2 组集合的差异性，对称差越大，集合之间的差异则越明显，相似度越小，如图 1 所示。对称差应用于多属性决策问题需要进行前提假设，即多属性决策涉及的属性指标数量不随决策过程发生变化，否则决策将失去准确性。

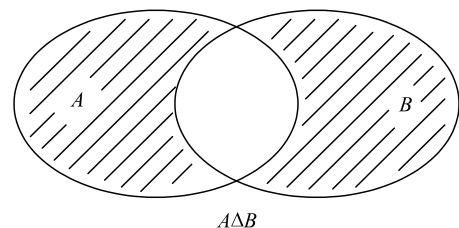


图 1 对称差概述

由此可通过对称差代替欧氏距离计算样本与理想解的相似度，对称差的计算公式为：

$$t(x, y) = \left| \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| - \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \quad (15)$$

### 3.2 改进步骤

利用对称差代替欧氏距离计算相似度，改进模型计算步骤的 1—4 步与经典 TOPSIS 模型一致，改进后的第  $i$  个加权规范样本到理想解的相似度  $t_i^*$  和到负理想解的相似度  $t_i^-$  可表示为：

$$t_i^* = \left| \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^n (x_j^*)^2 - \sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^* \right| - \left| \sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^* \right| \quad (16)$$

$$t_i^- = \left| \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^n (x_j^-)^2 - \sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^- \right| - \left| \sum_{j=1}^n x_{ij} x_j^- \right| \quad (17)$$

对称差与样本相似度呈正相关，因此改进对称差模型中第  $i$  个样本的相对贴程度可表示为：

$$C_i = t_i^- / (t_i^- + t_i^*) \quad (18)$$

按照相对贴程度顺序确定方案的优劣顺序，相对贴程度越大，方案的排序越靠前。

## 4 模型验证

### 4.1 稳定性验证

TOPSIS 模型的稳定性主要体现在当评价数据的条目发生变化，评价结果是否发生变化，即逆序现象是否出现。Kendall Rank 相关系数可用在排列顺序方面评价 2 组变量的相似性。

Kendall Rank 相关系数的计算原理是，假设 2 组元素数量均为  $N$  的序列  $X$ 、 $Y$ ，其中第  $i(1 \leq i \leq N)$  个元素的值分别用  $X_i$ 、 $Y_i$  表示，第  $j(1 \leq j \neq i \leq N)$  个元素的值分别用  $X_j$ 、 $Y_j$  表示。当出现情况 1( $X_i < X_j$  且  $Y_i < Y_j$ )或情况 2( $X_i > X_j$  且  $Y_i > Y_j$ )时，认为这 2 组元素是一致的。当出现情况 3( $X_i < X_j$  且  $Y_i > Y_j$ )或情况 4( $X_i > X_j$  且  $Y_i < Y_j$ )时，认为这 2 组元素是不一致的。当出现情况 5( $X_i = X_j$ )或情况 6( $Y_i = Y_j$ )时，这 2 组元素既不是一致也不是不一致的。

Kendall Rank 相关系数为：

$$\tau = K / \binom{n}{2} = \frac{c - d}{n(n-1)/2} \quad (19)$$

式中： $c$  为一致元素对的个数； $d$  为不一致元素对的个数； $n$  为集合中数的个数。当不存在情况 5 和情况 6 时，Kendall Rank 相关系数可以表示为<sup>[14]</sup>：

$$K = c - d = 2c - \binom{n}{2} \quad (20)$$

Kendall Rank 相关系数的取值范围在  $-1 \sim 1$ ，当值为 1 时，表示 2 组变量的顺序完全一致；当值为

$-1$  时，表示 2 组变量的顺序完全相反。

以 Kendall Rank 相关系数为标准，设计经典 TOPSIS 模型、改进 Tanimoto 模型以及改进对称差模型的稳定性验证实验，具体步骤如下：

1) 以行数为 10，列数由 2~30 的正态分布随机矩阵为例，模拟 3 种模型在评价指标数量不同时所产生的评价结果。

2) 将评价结果中排序最靠前的方案删除，重新代入模型中进行计算，产生新的评价结果。

3) 计算删除最优方案前后 2 组方案排序序列的 Kendall Rank 相关系数。

4) 重复步骤 1)~3) 100 次，计算平均 Kendall Rank 相关系数。

实验结果如表 1 和图 2 所示。图 2 可更清晰地观察各模型在指标数量变化时稳定性所呈现的变化。在评价指标数量较少时，3 种模型都具有较好的稳定性，当评价指标数量大于 10 时，改进 Tanimoto 模型的平均 Kendall Rank 相关系数逐渐降低并在评价指标数量大于 20 时降低至 0.65 左右，而其他 2 个模型的平均 Kendall Rank 相关系数虽有降低，但依旧维持在 0.85 左右，较为稳定。

表 1 部分平均 Kendall Rank 相关系数

维数	TOPSIS 模型	改进 Tanimoto 模型	改进对称差模型
2	0.885	0.891	0.901
3	0.898	0.836	0.848
4	0.884	0.848	0.841
5	0.880	0.820	0.897

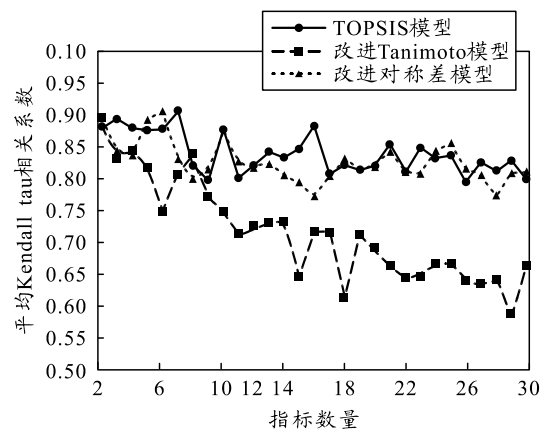


图 2 Kendall Rank 相关系数变化情况

同时，也可看出：由于 3 种模型均采用正负理想解取自样本数据中最优和最劣指标组合而成的策略；因此，无法在根本上避免逆序现象的产生，也正是如此，经典 TOPSIS 模型以及 2 种改进模型在面临样本数据处于动态变化且对精度要求较高的评价问题时，可能无法给出客观准确的评价结果。

### 4.2 特异性验证

TOPSIS 模型的特异性验证主要体现在评价数据时，是否会出现某些数据无法得到准确的评价。经典 TOPSIS 模型由于采用欧式距离作为相似度判定，因此在数据空间中存在一些点无法准确得到评价的问题。

在 2 维平面中，到 2 个固定点距离成定比的点集，可以构成一个圆，称作阿波罗尼斯圆。

$$\frac{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}}{\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}}=k, k \neq 1. \quad (21)$$

式中： $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ 为 2 维空间中两定点； $k$  为不等于 1 的常数。当  $k=1$  时，该式表示  $A, B$  2 点连线的中垂线。

同理，在任意高维空间，通过 2 个定点，可确定一个  $k$  值对应唯一一个阿波罗尼斯超球，该球面上的任意一点到两定点的欧氏距离之比为定值。

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n(x-a_i)^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^n(x-b_i)^2} = k, k \neq 1, i=1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

由于经典 TOPSIS 模型使用待评价方案到正负理想解的欧氏距离进行相似度判断，而阿波罗尼斯超球上的点到正负理想解两点欧氏距离的比值始终为定值，因此无法进行优劣排序。

以 2 维空间， $k=2$ ，正理想点  $F_1=(0.9, 0.9)$ ，负理想解  $F_2=(0.1, 0.1)$ ，权重值均为 1 为例。点  $F_i=(x_i, y_i), i=3, 4, \dots, 20$  为阿波罗尼斯圆上随机选取的 18 个点。示例数据如表 2 所示，样本点在 2 维平面上的位置如图 3 所示。

表 2 实例样本数据

样本	指标		样本	指标	
	x	y		x	y
$F_1$	0.900 0	0.900 0	$F_{11}$	0.197 2	0.494 0
$F_2$	0.100 0	0.100 0	$F_{12}$	0.484 6	0.213 9
$F_3$	0.143 1	0.521 0	$F_{13}$	0.413 0	0.315 9
$F_4$	0.367 4	0.365 9	$F_{14}$	0.075 4	0.547 7
$F_5$	0.215 0	0.483 9	$F_{15}$	0.073 0	0.548 5
$F_6$	0.425 6	0.300 3	$F_{16}$	0.472 4	0.234 0
$F_7$	0.096 9	0.540 0	$F_{17}$	0.446 5	0.272 5
$F_8$	0.009 2	0.566 8	$F_{18}$	0.464 1	0.246 8
$F_9$	0.164 8	0.510 9	$F_{19}$	0.374 0	0.359 2
$F_{10}$	0.494 4	0.196 5	$F_{20}$	0.092 1	0.541 8

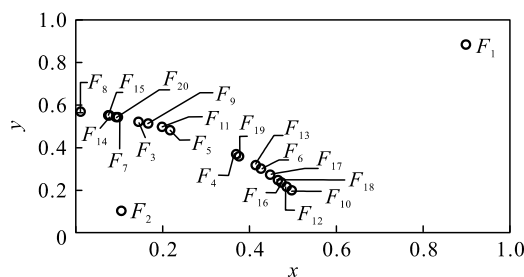


图 3 样本点在 2 维空间位置

以点  $F_1$  和  $F_2$  分别作为正负理想解，计算剩余 18 个点的贴近度值，给出排序，实验结果如表 3 所示。

表 3 特异性实验结果对比

模型	序号	相对贴近度	模型	序号	相对贴近度
TOPSIS 模型	1	1.000	改进 Tanimoto 模型	5	0.702
	12	0.378		11	0.696
	10	0.378		9	0.685
	16	0.378		3	0.679
	18	0.378		7	0.665
	17	0.377		20	0.663
	6	0.376		14	0.658
	13	0.375		15	0.657
	19	0.372		8	0.630
	4	0.371		2	0.177
	5	0.352	改进对称差模型	1	1.000
	11	0.349		12	0.270
	9	0.340		10	0.270
	3	0.342		16	0.270
	7	0.337		18	0.270
	20	0.337		17	0.269
	14	0.335		6	0.267
	15	0.335		13	0.266
	8	0.329		19	0.260
	2	0.074		4	0.259
改进 Tanimoto 模型	1	0.939	5	0.228	
	12	0.843	11	0.224	
	10	0.835	9	0.218	
	16	0.825	3	0.214	
	18	0.819	7	0.206	
	17	0.806	20	0.205	
	6	0.793	14	0.202	
	13	0.786	15	0.202	
	19	0.765	8	0.194	
	4	0.762	2	0.006	

从上表可以看出：对于在阿波罗尼斯圆上的点，虽然 3 种模型都得到了相似的评价结果，但经典 TOPSIS 模型和改进对称差模型计算得到的相似度值区分度低，面对评价精度要求较高的研究背景时，无法与其他的相关误差做出较好的区分并提供较为准确的评价结果。

### 4.3 敏感性验证

敏感性分析又称为灵敏度分析，在数理统计中被定义为定量描述模型输入变量对输出变量重要性的方法；因此，实际应用中多根据敏感性验证得到敏感性系数较大的指标，并重点考虑敏感性系数较大的指标，从而在保持一定精度的前提下减少数据分析的工作量，降低模型的复杂度。根据同组数据和不同模型计算的方式，探寻不同模型对数据的敏感性问题。

敏感度应用于 TOPSIS 模型中的定义为，样本的相对贴近度对指标数据的敏感程度，即相对贴近度的变化率除以指标数据的变化率：

$$SAF = \frac{\Delta A / A}{\Delta F / F}. \quad (23)$$

式中: SAF 为敏感度系数;  $\Delta A/A$  为样本的相对贴近度的变化率;  $\Delta F/F$  为指标数据的变化率。

以探寻模型评价敏感性为目标, 设计经典 TOPSIS 模型、改进 Tanimoto 模型以及改进对称差模型的敏感性验证实验, 具体步骤如下:

1) 生成  $10 \times 5$  的正态分布矩阵, 作为实例样本数据, 如表 4 所示, 权重指标设为 1。

表 4 样本数据

样本	指标				
	1	2	3	4	5
$F_1$	0.955	0.143	0.332	0.690	0.132
$F_2$	0.002	0.760	0.548	0.141	0.037
$F_3$	0.501	0.515	0.038	0.772	0.585
$F_4$	0.365	0.929	0.258	0.416	0.429
$F_5$	0.727	0.441	0.352	0.979	0.204
$F_6$	0.212	0.664	0.493	0.728	0.827
$F_7$	0.247	0.690	0.473	0.695	0.349
$F_8$	0.849	0.212	0.568	0.524	0.875
$F_9$	0.608	0.606	0.366	0.991	0.718
$F_{10}$	0.575	0.831	0.301	0.252	0.416

2) 分别使用经典 TOPSIS 模型、改进 Tanimoto 模型和改进对称差模型对实例样本进行计算, 获取各方案的相对贴近度。

3) 以样本数据  $F_1$ , 指标 3 为例, 只改变指标 3 的值, 其他指标不变, 实例数据如表 5 所示。

表 5 样本数据

样本	指标				
	1	2	3	4	5
$F_1$	0.955	0.143	0.100	0.690	0.132
$F_2$	0.955	0.143	0.200	0.690	0.132
$F_3$	0.955	0.143	0.332	0.690	0.132
$F_4$	0.955	0.143	0.400	0.690	0.132
$F_5$	0.955	0.143	0.500	0.690	0.132
$F_6$	0.955	0.143	0.600	0.690	0.132
$F_7$	0.955	0.143	0.700	0.690	0.132
$F_8$	0.955	0.143	0.800	0.690	0.132
$F_9$	0.955	0.143	0.900	0.690	0.132

4) 计算 3 个模型的相对贴近度值以及敏感度系数, 并将相对贴近度值的变化趋势进行记录, 实验结果如图 4 和表 6 所示。

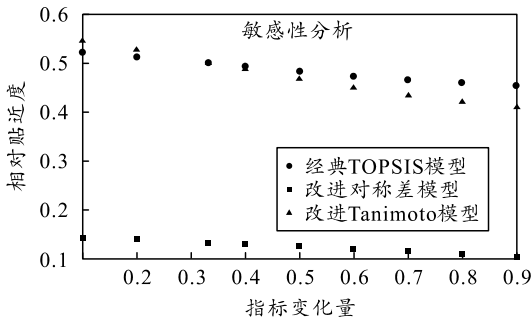


图 4 相对贴近度变化趋势

表 6 敏感度系数

模型名称	TOPSIS 模型	改进 Tanimoto 模型	改进对称差模型
敏感度系数	12.202	21.353	21.353

综上可得出结论: 改进 Tanimoto 模型对于指标变化的敏感性最强, 经典 TOPSIS 模型其次, 改进对称差模型敏感性最差。结合 Tanimoto 系数的集合表达式:

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{|A \cap B|}{|A| + |B| - |A \cap B|} \quad (24)$$

可以看出, Tanimoto 系数的分母中减去了 2 个集合中相同的部分, 放大了集合间的差异, 因此敏感性相比其他 2 种方法更强。

### 4.4 有效性验证

以装备保障网络节点重要性<sup>[15]</sup>为例, 验证笔者所提模型的有效性, 影响装备保障网络的指标以及权重如表 7 和 8 所示(由层次分析法得出)。

表 7 装备保障网络各节点指标

节点	度指标	介数指标	节点删除指标	接近中心性指标	子图指标
1	0.555 6	16.67	0.10	0.470 1	0.145 9
2	0.555 6	16.67	0.10	0.470 1	0.145 9
3	0.666 7	7.33	0.10	0.474 6	0.201 3
4	0.333 3	28.00	0.30	0.494 4	0.056 1
5	0.222 2	16.00	0.20	0.555 6	0.026 8
6	0.111 1	0	0.10	1.250 0	0.018 3
7	0.333 3	0	0.10	0.705 9	0.085 0
8	0.444 4	1.67	0.10	0.578 3	0.117 8
9	0.444 4	1.67	0.10	0.578 3	0.117 8
10	0.333 3	0	0.10	0.705 9	0.085 0

表 8 各指标权重

权重	度指标	介数指标	节点删除指标	接近中心性指标	子图指标
w	0.057 6	0.137 9	0.137 9	0.333 3	0.333 3

将样本数据分别代入 3 种模型中进行计算, 最终结果如表 9 所示。

表 9 有效性实验对比结果

模型	节点	相对贴近度	模型	节点	相对贴近度
TOPSIS 模型	1	0.586 4	改进 Tanimoto 模型	8	0.580 7
	2	0.586 4		9	0.580 7
	4	0.578 8		7	0.393 1
	3	0.535 9		10	0.393 1
	5	0.369 1		6	0.198 7
	8	0.317 5		1	0.667 7
	9	0.317 5		2	0.667 7
	7	0.222 8		4	0.653 8
	10	0.222 8		3	0.571 5
	6	0.156 9		5	0.255 0
改进 Tanimoto 模型	1	0.889 0	改进对称差模型	8	0.177 9
	2	0.860 7		9	0.177 9
	4	0.860 7		7	0.075 9
	3	0.835 9		10	0.075 9
	5	0.715 1		6	0.033 5

整体上看, 3 种模型得到的排序结果基本一致, 可以证明改进模型的有效性。其中经典 TOPSIS 模型与改进对称差模型得到的节点重要性排序是一致的, 但改进 Tanimoto 模型在节点 1、2 和 4 的排序上与其他 2 种模型不同。由于节点 4 的介数指标、

节点删除指标、接近中心性指标均优于节点 1 和 2, 但占有最高指标权重的子图指标相比节点 1 和 2 相差较多; 因此, 主观上无法判断哪种模型的评价排序更为准确。笔者认为, 改进 Tanimoto 系数模型与其他 2 种模型评价结果出现不同的原因是改进 Tanimoto 系数模型对指标自身变化的敏感性更强; 因此, 在评价节点 1、2 和 4 的过程中出现了与其他 2 种模型不同的结果。

## 5 结论

TOPSIS 法是一种常见且有效的多属性决策方法, 但其依旧存在缺陷, 如何改善或解决这些缺陷是笔者的研究重点。笔者首先对经典 TOPSIS 模型进行原理和计算步骤的概述, 并指出 3 点 TOPSIS 模型所具有的缺陷。为解决这些缺陷, 提出基于 Tanimoto 系数和基于对称差的改进 TOPSIS 模型, 并分别从稳定性、特异性、敏感性和有效性 4 方面对改进模型进行验证分析。

基于 Tanimoto 系数的改进 TOPSIS 模型在指标数量较少时具有较好的稳定性, 并且具有良好的特异性, 敏感性也优于其他 2 种模型。同时, 由于 Tanimoto 系数包含指标向量方向的计算; 因此, 基于 Tanimoto 系数的改进 TOPSIS 模型, 适用于评价指标具有相关性且数量较少的多属性决策问题。并且由于其对指标的变化较为敏感; 因此, 在指标权重不能较好区分指标重要性的场合具有优势。

基于对称差的改进 TOPSIS 模型在指标数量较少或较多的情况下都具有较好的稳定性, 但其在特异性和敏感性方面的表现较差; 因此, 基于对称差的改进 TOPSIS 模型适用于对样本数据动态变化的场合。但需注意的是, 虽然基于对称差的改进 TOPSIS 模型相比其他 2 种模型稳定性较好, 但依旧无法杜绝逆序现象的产生。

## 参考文献:

- [1] 周亚. 多属性决策中的 TOPSIS 法研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2009.
- [2] HWANG C L, YOON K P. Multiple attribute decision making[M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1981, 404: 287-288.
- [3] 叶茂. 基于 TOPSIS 的改进双层多目标优化方法研究及应用[D]. 泰安: 山东农业大学, 2021.
- [4] ASHRAF Q M, HABAEBI M H, ISLAM M R. TOPSIS-based Service Arbitration for Autonomic Internet of Things[J]. IEEE Access, 2016, 4: 1313-1320.
- [5] TIAN G D, ZHANG H H, ZHOU M C, et al. AHP, Gray Correlation, and TOPSIS Combined Approach to Green Performance Evaluation of Design Alternatives[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 48(7): 1093-1105.
- [6] ZYTOON M A. A Decision Support Model for Prioritization of Regulated Safety Inspections Using Integrated Delphi, AHP and Double-Hierarchical TOPSIS Approach[J]. IEEE Access, 2020, 8: 83444-83464.
- [7] GUI Y, CHEN Y. A Cache Placement Strategy Based on Entropy weighting method and TOPSIS in Named Data Networking[J]. IEEE Access, 2021, 9: 56240-56252.
- [8] 李海君, 赵建忠, 应新永. 基于组合赋权-改进 TOPSIS 的区域装备保障能力评估[J]. 舰船电子工程, 2021, 41(12): 126-131.
- [9] 李琳. 基于距离计算改进的 TOPSIS 多属性决策研究[D]. 南宁: 广西大学, 2019.
- [10] HO L H, LIN Y L, CHEN T Y. A Pearson-like correlation-based TOPSIS method with interval-valued Pythagorean fuzzy uncertainty and its application to multiple criteria decision analysis of stroke rehabilitation treatments[J]. Neural Computing and Applications, 2020, 32(12): 8265-8295.
- [11] 王颖君. 基于改进 Topsis 法的土地集约利用评价研究[D]. 武汉: 华中农业大学, 2013.
- [12] 陈思博. TOPSIS 综合评价方法的逆序问题及其改进研究[D]. 杭州: 浙江财经大学, 2018.
- [13] AI Z H. TOPSIS with Interval Number and Uncertain Weight Based on Tanimoto Measure[C]//Ninth International Conference on Computational Intelligence & Security. IEEE Computer Society, 2013.
- [14] 李世宽. 基于 Kendall 秩相关系数的沙漠地震噪声性质研究及应用[D]. 长春: 吉林大学, 2020.
- [15] 邢彪, 曹军海, 宋太亮, 等. 基于 TOPSIS 的装备保障网络节点重要性综合评价方法[J]. 装甲兵工程学院学报, 2017, 31(3): 28-34.