

doi: 10.7690/bgzdh.2024.08.001

模糊 PID 控制在倒立摆稳摆中的噪声抑制分析

詹明锷, 周浩

(海军工程大学兵器工程学院, 武汉 430030)

摘要: 针对普通 PID 控制在倒立摆稳摆中不能有效抑制干扰噪声的问题, 通过模糊控制算法对 PID 参量整定进行在线实时调整。在完成模糊 PID 控制器的设计应用后对倒立摆稳摆中的噪声抑制效果进行分析, 并对影响控制效果的隶属函数选取进行探讨。结果表明: 模糊 PID 参数整定能起到噪声抑制效果, 且模糊算法使用方便, 适应性强。

关键词: 倒立摆; 模糊控制; 参数整定; 噪声抑制; 隶属函数

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Noise Suppression Analysis of Fuzzy PID Control in Inverted Pendulum Stabilization

Zhan Mingkun, Zhou Hao

(College of Weapon Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430030, China)

Abstract: Aiming at the problem that the ordinary PID control can not effectively suppress the interference noise in the stabilization of the inverted pendulum, the fuzzy control algorithm is used to adjust the PID parameters online in real time. After the design and application of the fuzzy PID controller, the noise suppression effect of the inverted pendulum is analyzed, and the selection of the membership function which affects the control effect is discussed. The results show that the fuzzy PID parameter tuning can play a role in noise suppression, and the fuzzy algorithm is easy to use and has strong adaptability.

Keywords: inverted pendulum; fuzzy control; parameter tuning; noise suppression; membership function

0 引言

众所周知, 许多现代工程应用领域都需要更精准、更高效的控制策略, 并且都需要系统对环境噪声进行有效抑制。事实上倒立摆稳摆控制是从这些工程应用系统剥离出的本质问题, 可以说正是倒立摆系统控制的典型代表性和其参数易调整性, 使其成为检验复杂控制算法的理想替代实验研究平台。也就是说, 将当前诸多先进的控制算法应用在倒立摆系统中, 可验证这些控制算法的应用效果, 尤其是倒立摆系统对外界扰动的抑制能力分析, 它的研究成果将对抗扰性能提升有很好的借鉴价值。

倒立摆属于特性明显的复杂系统, 其模型非线性、自然非稳定、多变量、强耦合等一系列的典型特征使其成为控制领域中典型的实验研究平台。它能验证实际应用的可行性, 能比较各种控制算法的优劣。通常在倒立摆控制中会用到经典的 PID 控制, 从本质上说, PID 算法不仅蕴含动态控制过程的当前信息, 而且充分利用历史信息 and 预判的未来趋势信息, 这 3 类信息的合理配置运用, 使得 PID 控制算法获得广泛而深入的应用, 而且通常能获得较为满意的控制效果, 但倒立摆控制毕竟属于非线性控

制, PID 调节在非线性系统中的应用效果会大打折扣, 无论是控制精度下降还是系统的稳定性、安全性得不到保障, 都会重新审视 PID 算法应用的有效性, 从而必须对 PID 算法进行改进。在这样的背景下, 笔者通过模糊控制对 PID 参量整定进行在线实时调整, 分析模糊 PID 控制器在倒立摆系统稳摆控制中对噪声的抑制效果, 并对影响控制效果的隶属函数进行分析。希望能获得一些有益的结论从而大幅改善 PID 控制在非线性复杂系统中的应用效果。

1 倒立摆模型构建

将直线倒立摆抽象成小车和匀质杆组成的刚体系统^[1], 其结构如图 1 所示。将系统运动过程中可能受到的摩擦和空气扰动忽略后^[2], 直线倒立摆的数学模型将得以简化。

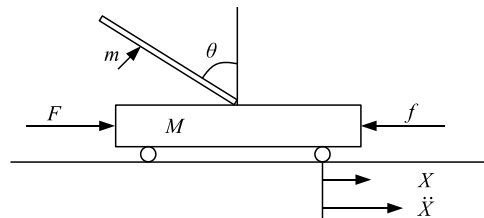


图 1 直线倒立摆模型

此时小车和摆杆的受力分析如图 2 和 3 所示。

收稿日期: 2024-04-27; 修回日期: 2024-05-27

第一作者: 詹明锷(1998—), 男, 辽宁人, 硕士。

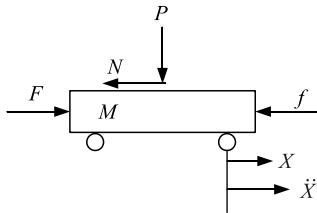


图 2 小车受力分析

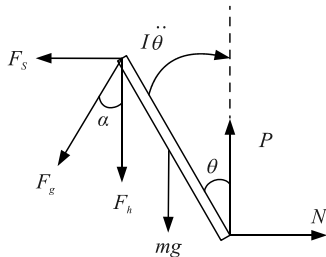


图 3 摆杆受力分析

系统模型的相关变量规定如下^[3]: 小车质量 M , 摆杆质量 m , 小车摩擦力 f , 摆杆转动到轴心再到杆质心的长度 L , 摆杆惯量 I , 作用在小车上的外力 F , 小车位置 x , 摆杆与竖直向上的夹角 θ , 摆杆受到的水平方向干扰 F_s , 摆杆受到的垂直方向干扰 F_h , F_s 与 F_h 的合力 F_g , 重力加速度 g , N 和 P 为小车与摆杆之间作用力与反作用力的水平和垂直分量。

应用经典力学理论建立倒立摆动力学方程, 小

表 1 倒立摆实际参数

小车质量/kg	摆杆质量/kg	摆杆转动惯量/(kg·m ²)	摆杆质心到转轴距离/m	重心加速度/(m/s ²)
1.096	0.109	0.003 4	0.25	9.8

得到:

$$\ddot{\varphi} = 29.4\varphi + 3\ddot{x} - 6F_f/m \quad (8)$$

忽略 F_f 后, 倒立摆系统的微分方程为:

$$\ddot{\varphi} = 29.4\varphi + 3\ddot{x} \quad (9)$$

考虑微分方程与传递函数的转换关系, 得到以小车加速度为输入, 以摆杆角度为输出的传递函数:

$$\theta(s)/R(s) = 3/(s^2 - 29.4) \quad (10)$$

使用 Matlab 绘制上述开环传递函数的根轨迹如图 4 所示, 显然系统根轨迹穿越虚轴进入 S 平面的右半平面, 系统处于开环不稳定状态。

2 模糊 PID 参数整定

普通 PID 控制器以设定 $r(t)$ 与实际的输出值 $y(t)$ 构成控制偏差: $e(t) = r(t) - y(t)$, 以 $u(t) = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_r} \int_0^t e(t) dt + \frac{T_d}{dt} de(t) \right)$ 为控制规律, 运用试凑法, 通过调整 P、I、D 3 个参数, 使系统的动态过程令人满意。

车的动力学方程为:

$$M\ddot{x} = F - f - N \quad (1)$$

摆杆的动力学方程为:

$$N - F_s = m d^2/dt^2 (x + L \sin \theta); \quad (2)$$

$$-P + mg + F_h = d^2/dt^2 (L - L \cos \theta); \quad (3)$$

$$F_g L \cos \theta + F_g L \cos \alpha \sin \theta + PL \sin \theta + NL \cos \theta \varphi = -J\ddot{\theta} \quad (4)$$

联立式(2)–(4)得:

$$F_g L \sin \alpha \cos \theta + 2F_g L \cos \alpha \sin \theta + (J + mL^2 \cos 2\theta) \ddot{\theta} + mgL \sin \theta - mL^2 \dot{\theta}^2 \sin 2\theta + mL\ddot{x} \cos \theta = 0 \quad (5)$$

设 $\theta = \pi + \varphi$ (φ 是摆杆与竖直方向夹角, rad),

并假设 $\varphi \leq 1$, 可作近似处理:

$$\cos \theta = -1, \sin \theta = -\varphi, (d\theta/dt)^2 = 0, \cos 2\theta = 1, \sin 2\theta = \varphi.$$

简化上述力矩平衡方程, 得到:

$$2F_g (-\sin \alpha - \varphi \cos \alpha) + 4mL\ddot{\varphi}/3 - mg\varphi = m\ddot{x} \quad (6)$$

令 $F_f = F_g (-\sin \alpha - \varphi \cos \alpha)$, 则简化方程为:

$$2F_f + 4mL\ddot{\varphi}/3 - mg\varphi = m\ddot{x} \quad (7)$$

实际参数如表 1 所示。

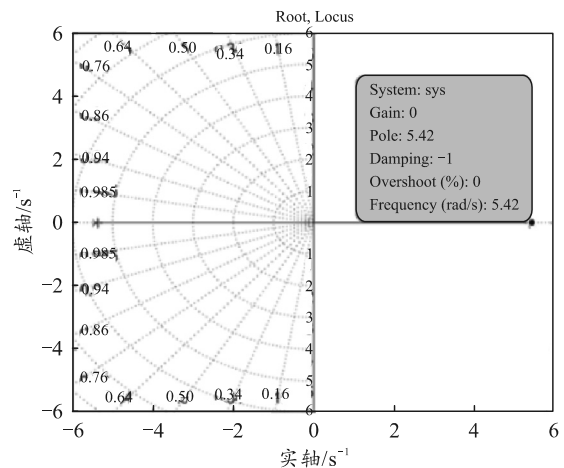


图 4 开环根轨迹

2.1 模糊 PID 参数整定原理与流程

模糊 PID 算法是模糊控制在 PID 参数整定过程中的应用, 模糊 PID 控制器的设计是在普通 PID 控制基础上, 将偏差量 e 和偏差量的变化率 ec 作为模糊控制部分的输入量^[4], 通过模糊推理, 将反模糊化的输出量 ΔK_P 、 ΔK_I 、 ΔK_D 叠加到对应 PID 各参量

中，得到被控对象的综合控制量，实现系统稳定控制。模糊 PID 参数整定原理如图 5 所示，参数整定流程如图 6 所示。

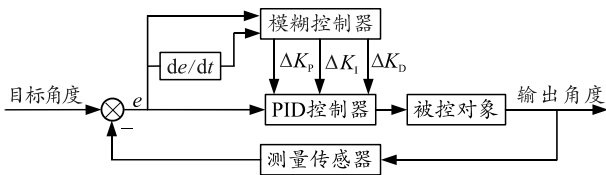


图 5 模糊 PID 参数整定原理

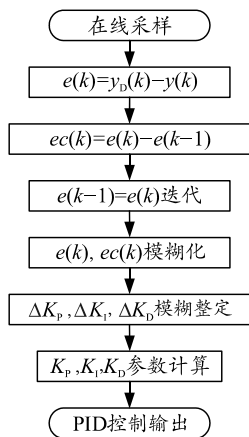


图 6 模糊 PID 参数整定流程

2.2 模糊子集与论域设置

笔者针对摆杆角度控制进行设计，模糊 PID 控制器的输入量为角度偏差和角度偏差变化率，分别用 e 和 ec 表示，对 e 和 ec 进行模糊化处理，其模糊子集均定义为 NB、NM、NS、ZO、PS、PM、PB 7 个，分别表示负大、负中、负小、零、正小、正中、正大^[5]。为使摆杆角度在竖直位置平衡点附近不停小幅调整最终达到动态平衡，设置 e 的论域为 $(-5, 5)$ ， ec 的论域为 $(-5, 5)$ ^[6]，偏差量 ΔK_p 的论域为 $(110, 120)$ ， ΔK_1 的论域为 $(115, 125)$ ， ΔK_D 的论域为 $(80, 90)$ 。

为获得简洁的计算过程和良好的可视性，输入和输出变量暂选定为三角形隶属函数^[7](trimf)，trimf 函数曲线如图 7 所示。

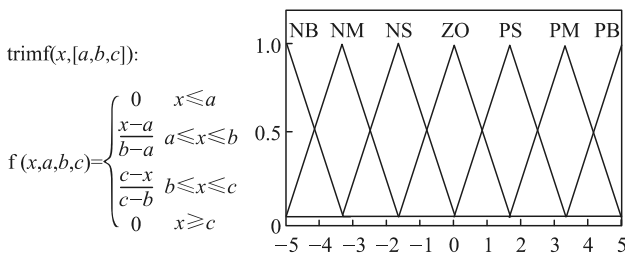


图 7 trimf 函数曲线

2.3 模糊规则制定

模糊控制规则通常基于人的经验来制定，是模

糊控制的核心，它的合理确定严重影响控制效果，其模糊子集数量的确定需要根据系统控制性能的实际需求来设置^[8]。根据实际操作经验和实验数据分析可知：在控制调整初期，为使摆杆响应速度提高，稳定偏差减小，可适当增大 K_p 值，调整一段时间后，为使超调量减小，稳定性增强，可适当减小 K_p 值；调整后期，为减小静差，控制精度提高，可以适当将 K_p 值调大。

同样在控制调整初期，为防止积分饱和， K_1 可尽量取小，同时增大 K_D 以使系统获得较小超调，调整一段时间后， K_1 适当增大以增强系统稳定，同时减小 K_D 保持系统调节稳定；调整后期，继续增大 K_1 ，以减小调节静差，并适当减小 K_D ，以补偿初始调节时间长的不足。

基于上述模糊规则制定的考量，将模糊 PID 参数整定 ΔK_p 、 ΔK_1 、 ΔK_D 规则表确定为如图 8 所示，运用 MamdanL 的 max-min 合成算法对参数进行模糊推理^[9]。

	ec							
	ΔK_p	NB 负大	NM 负中	NS 负小	ZO 零	PS 正小	PM 正中	PB 正大
e	NB 负大	PB 正大	PB 正大	PM 正中	PM 正中	PS 正小	ZO 零	NS 负小
	NM 负中	PB 正大	PB 正大	PM 正中	PS 正小	PS 正小	ZO 零	NS 负小
	NS 负小	PM 正中	PM 正中	PM 正中	PS 正小	ZO 零	NS 负小	NS 负小
	ZO 零	PM 正中	PM 正中	PS 正小	ZO 零	NS 负小	NM 负中	NM 负中
	PS 正小	PS 正小	PS 正小	ZO 零	NS 负小	NS 负小	NM 负中	NM 负中
	PM 正中	PS 正小	ZO 零	NS 负小	NM 负中	NM 负中	NM 负中	NB 负大
	PB 正大	ZO 零	ZO 零	NM 负中	NM 负中	NM 负中	NB 负大	NB 负大
	ΔK_1	NB 负大	NM 负中	NS 负小	ZO 零	PS 正小	PM 正中	PB 正大
	NB 负大	NB 负大	NB 负大	NM 负中	NM 负中	NS 负小	ZO 零	ZO 零
	NM 负中	NB 负大	NB 负大	NM 负中	NS 负小	NS 负小	ZO 零	ZO 零
	NS 负小	NB 负大	NM 负中	NS 负小	NS 负小	ZO 零	PS 正小	PS 正小
	ZO 零	NM 负中	NM 负中	NS 负小	ZO 零	PS 正小	PM 正中	PM 正中
	PS 正小	NM 负中	NS 负小	ZO 零	PS 正小	PS 正小	PM 正中	PB 正大
	PM 正中	ZO 零	ZO 零	PS 正小	PS 正小	PM 正中	PB 正大	PB 正大
PB 正大	ZO 零	ZO 零	PS 正小	PM 正中	PM 正中	PB 正大	PB 正大	
ΔK_D	NB 负大	NM 负中	NS 负小	ZO 零	PS 正小	PM 正中	PB 正大	
NB 负大	PS 正小	NS 负小	NB 负大	NB 负大	NB 负大	NM 负中	PS 正小	
NM 负中	PS 正小	NS 负小	NB 负大	NM 负中	NM 负中	NS 负小	ZO 零	
NS 负小	ZO 零	NS 负小	NB 负大	NM 负中	NS 负小	NS 负小	ZO 零	
ZO 零	ZO 零	NS 负小	NS 负小	NS 负小	NS 负小	NS 负小	ZO 零	
PS 正小	ZO 零	ZO 零	ZO 零	ZO 零	ZO 零	ZO 零	ZO 零	
PM 正中	PB 正大	NS 负小	PS 正小	PS 正小	PS 正小	PS 正小	PB 正大	
PB 正大	PB 正大	PM 正中	PM 正中	PM 正中	PS 正小	PS 正小	PB 正大	

图 8 ΔK_p 、 ΔK_1 、 ΔK_D 的模糊规则

根据上图可得到如图 9 所示的模糊规则曲面和如图 10 所示的模糊规则观察器。

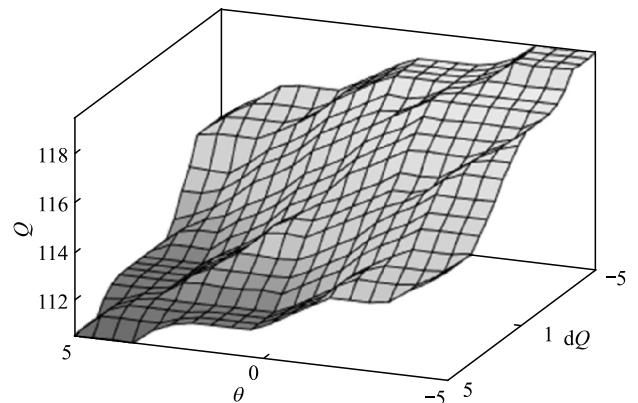


图 9 模糊规则曲面

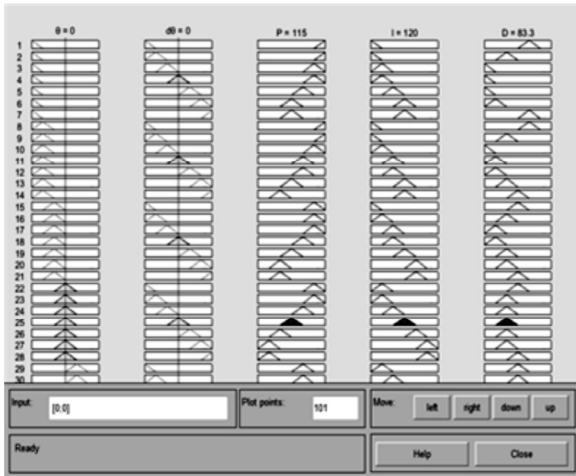


图 10 模糊规则观察器

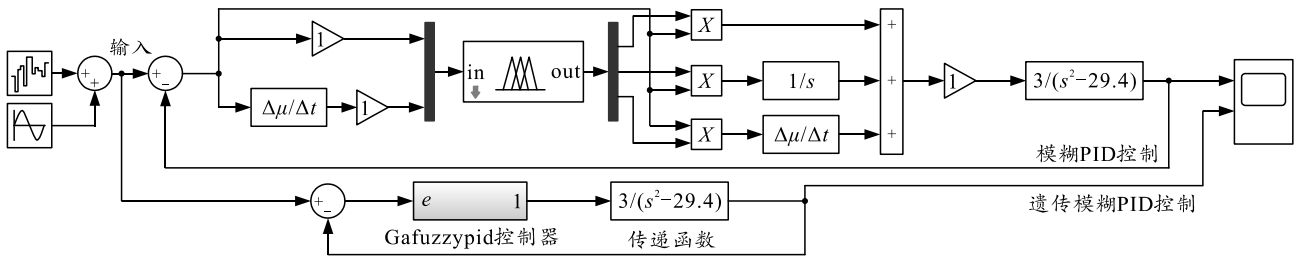


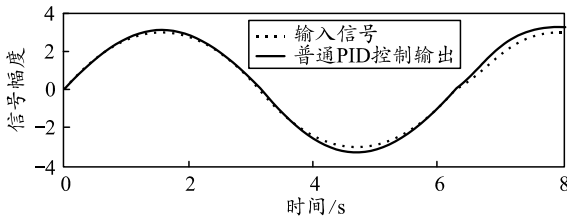
图 11 SimuLink 仿真模型搭建

图中同时搭建了普通 PID 控制和模糊 PID 控制 2 种应用仿真模型，目的是对比分析出固定参数整定与在线参数模糊整定的优劣。

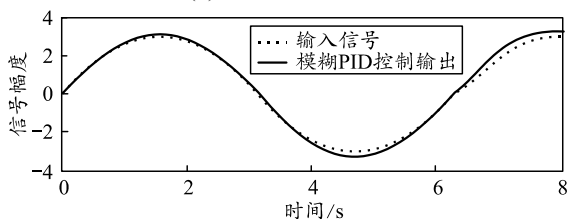
3.2 仿真实验与分析

3.2.1 理想信号下的控制效果

当以正弦信号作为仿真实验输入，且无噪声干扰时，其仿真结果如图 12 所示，仿真中输入输出量的模糊子集都定义为 NB、ZO 和 PB 3 个，形成 9 条模糊规则。从仿真结果来看普通 PID 与模糊 PID 的控制效果不分伯仲。



(a) 普通 PID 控制



(b) 模糊 PID 控制

图 12 无噪声条件下普通 PID 与模糊 PID 的仿真对比

在解模糊时，为使输出结果更平滑、具有较好的时效性，采用重心法对经过模糊推理后的系统进行解模糊^[10]，其输出量值表示为：

$$v_0 = \int_v v \mu_v(v) dv / \int_v \mu_v(v) dv。$$

式中： $v \in V$ 为输出论域中的元素； $\mu_v(v)$ 为输出元素在论域上的隶属度函数。

3 仿真与分析

3.1 仿真模型搭建

在理顺模糊 PID 参数整定思路与模糊处理的具体过程后，利用 Matlab/SimuLink 仿真平台，搭建倒立摆系统的仿真模型，如图 11 所示。

3.2.2 噪声背景下的控制效果

当正弦信号中夹杂高斯噪声时，如图 13 所示，通过仿真实验可得到如图 14 所示的仿真曲线，明显观察到模糊 PID 控制器对倒立摆系统的控制曲线更加平滑，在很大程度上消除了高斯噪声干扰，似乎利用“人”的经验智慧对控制过程进行干预从而得到相对平稳的控制效果，确实起到对噪声抑制的效果。

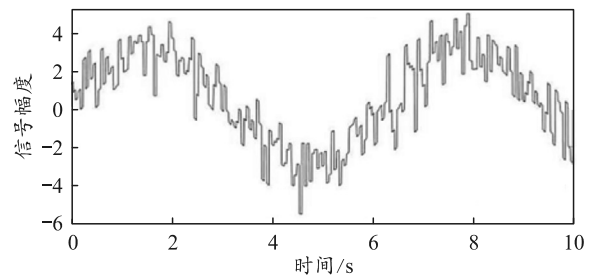


图 13 夹杂高斯噪声的正弦信号

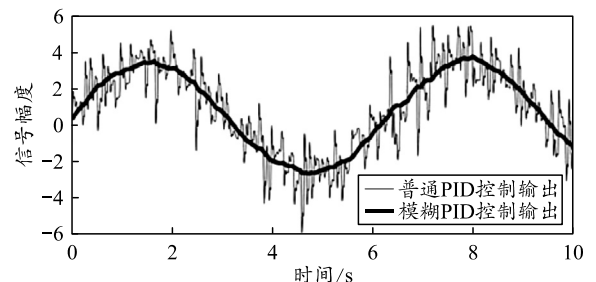


图 14 噪声干扰下普通 PID 与模糊 PID 的仿真对比

3.2.3 不同隶属函数下控制效果的差异

实际上基于模糊控制算法完成相关控制，都是在预先选定隶属函数情况下进行的，而关于隶属函数如何合理选取是非常重要的，笔者通过大量仿真实验发现隶属函数选取的差异会严重影响系统被控性能。值得关注的是，在利用 simuLink 仿真平台完成模糊 PID 参数整定从而完成有噪声干扰条件下倒立摆平衡点附近的稳摆控制中，为增强系统的鲁棒性，具备一定容错能力，将输入输出模糊子集都定义为 NB、NM、NS、ZO、PS、PM、PBNB、ZO 和 PB 9 个，最终形成 49 条规则。具体仿真实验时，选取多种典型的隶属函数，图 15—18 为当隶属函数分别选取 trimf 函数、trapmf 函数、gbellmf 函数、smf 函数时模糊 PID 控制对噪声干扰抑制的仿真结果，为加强与普通 PID 调节的直观对比，将普通 PID 控制效果一并给出，仿真中仍沿用图 13 中的噪声背景输入。

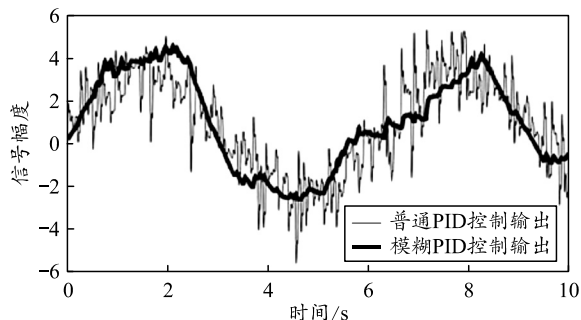


图 15 选取 trimf 函数时的噪声抑制效果仿真

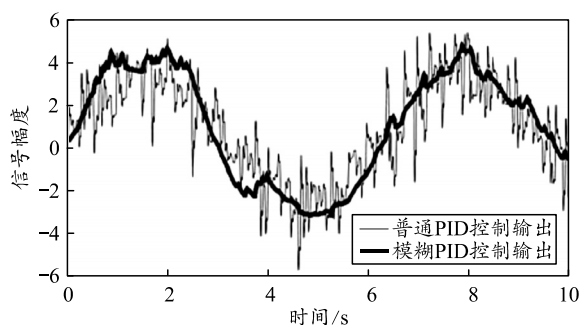


图 16 选取 trapmf 函数时的噪声抑制效果仿真

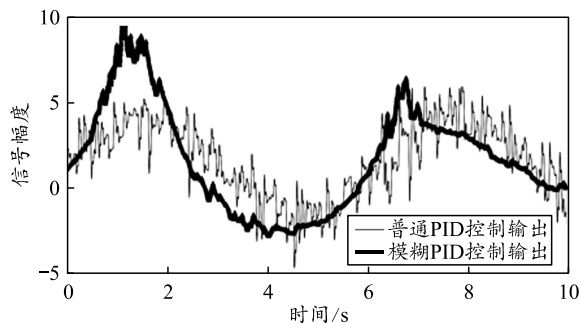


图 17 选取 gbellmf 函数时的噪声抑制效果仿真

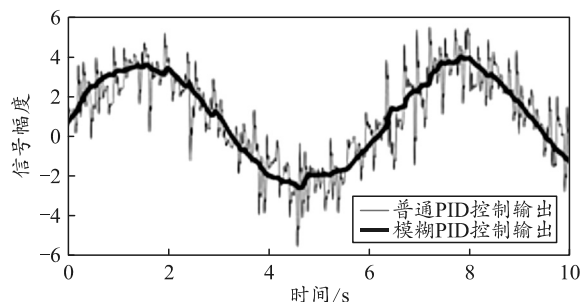


图 18 选取 smf 函数时的噪声抑制效果仿真

通过上述仿真不难发现，在运用模糊 PID 控制算法对倒立摆系统进行噪声干扰抑制时，不同隶属函数选取的控制效果截然不同。

观察图 15 与 16 的仿真结果，它们的噪声干扰抑制效果相似，这是因为选取的 trimf 函数与 trapmf 函数的图形相似度较大，于是模糊规则的制定效果趋于一致，控制结果相似。

观察图 17 与 18 的仿真结果，当仿真实验输入为夹杂高斯噪声的正弦信号时，选取 smf 函数作为隶属函数时，其控制性能更平稳，鲁棒性更好。

综上，隶属函数形状的差异对模糊 PID 参数整定影响较大，当选取的隶属函数形状变化较平坦时，其控制品质较高，系统较稳定，鲁棒性也较好；当选取的隶属函数形状陡变较大时，系统辨识度相对较高，控制更为敏捷，但必须牺牲一定程度的稳态性能。也就是说，分辨率高低的不同隶属函数选取要应当遵循论域误差大小的原则，当然所选取的隶属函数间应无间隙，否则会造成控制规则不完备而出现控制死区。

3.2.4 同一隶属函数不同模糊子集选取的差异

通过仿真实验同时发现，模糊子集定义不同，即模糊规则数量不同时，控制系统对指令信号的跟踪能力不同。从图 14 与 15 仿真结果来看，隶属函数选取相同，但模糊子集数量选取不同导致系统的控制效果差异较大，即在特定的噪声干扰背景下，模糊子集数量选取较小（即模糊规则较少）时，不仅仿真时间较短，而且系统对于真实指令的跟踪效果反而更好，鲁棒性更好，容错能力更强；体现在直观图形上就是模糊规则越少，仿真曲线越平滑，越贴近真实的指令信号。

同样如果将 gbellmf 函数的模糊子集定义为 3 个，将获得如图 19 所示下半部分的仿真结果，将图 17 的仿真曲线（模糊子集定义为 7 个）一并引入到图 19，进行对照比较后发现同样符合上述分析结论。

(下转第 9 页)