

doi: 10.7690/bgzdh.2025.02.002

# 基于方位刚性理论的编队机动控制技术

张靖雯, 李春涛

(南京航空航天大学自动化学院, 南京 211106)

**摘要:** 针对多无人机编队中存在的机动问题, 提出一种固定拓扑下编队机动控制方法。以“多长机-僚机”模式建立编队控制架构, 利用刚性图理论, 建立各无人机之间的交互拓扑结构, 确定了方位约束; 结合一致性理论与方位刚性理论, 提出一种能使僚机跟随长机以时变速度编队飞行的编队算法, 实现编队的缩放和平移机动; 通过将各无人机之间的方位约束从惯性坐标系旋转到由速度方向对齐形成的局部坐标系中, 实现编队的旋转机动。仿真结果表明: 该方法在 2 维平面与 3 维空间内, 均能实现编队的平移机动, 并在 2 维平面内, 验证了编队的缩放与旋转机动, 实现了队形的快速缩放与空间旋转。

**关键词:** 无人机编队; 方位刚性理论; 一致性; 方位对齐; 编队机动

**中图分类号:** V279 **文献标志码:** A

## Formation Maneuver Control Technology Based on Azimuth Rigidity Theory

Zhang Jingwen, Li Chuntao

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

**Abstract:** Aiming at the maneuvering problem of multi-UAVs formation, a formation maneuvering control method under fixed topology is proposed. The formation control architecture is established in the "multi-leader-wingman" mode, and the interaction topology between UAVs is established by using the rigid graph theory to determine the azimuth constraints. Combining the consistency theory and the azimuth rigidity theory, a formation algorithm is proposed, which can make the wingman follow the leader to fly in formation at a time-varying speed, and realize the scaling and translation maneuvers of the formation; By rotating the azimuth constraint of each UAV from the inertial coordinate system to the local coordinate system formed by the velocity direction alignment, the rotation maneuver of the formation is realized. The simulation results show that the method can realize the translational maneuver of the formation in the two-dimensional plane and three-dimensional space, and in the two-dimensional plane, the scaling and rotation maneuver of the formation is verified, and the rapid scaling and spatial rotation of the formation is realized.

**Keywords:** UAV formation; azimuth rigidity theory; consistency; azimuth alignment; formation maneuver

### 0 引言

为满足未来有人-无人协同作战的战场需求, 国内外学者针对无人机编队控制进行了广泛研究<sup>[1-3]</sup>。与单机作战相比, 多机协同编队可以充分利用单机资源, 实现“1+1>2”的效果, 完成复杂的作战任务<sup>[4-5]</sup>。

从智能体的感知能力和相互作用拓扑的角度来看, 多机协同编队可分为基于位置、位移和距离 3 大类编队控制方法<sup>[6-7]</sup>。基于距离的编队控制是指定各智能体间的距离, 确定目标编队; 而基于方位的编队控制通过给定各智能体间的交互拓扑结构, 确定目标队形。编队的理想队形是由各智能体之间的方位角约束<sup>[8]</sup>决定的, 但这种控制算法难以实现大规模的编队控制。随着视觉技术<sup>[9-10]</sup>发展, 机载摄像机可以直接测量相对位置矢量, Zhao 等<sup>[11]</sup>

借助刚性图理论, 提出了方位刚性的概念, 并成功在全局坐标系和局部坐标系下, 控制多智能体在 2 维和 3 维空间中, 形成一个具有固定拓扑结构的编队队形。

当无人机以指定队形编队飞行时, 存在编队机动问题, 即编队整体架构的平移、旋转和缩放控制<sup>[12]</sup>。为实现编队的缩放机动, Lin 等<sup>[13]</sup>提出了一种基于复拉普拉斯的分布式编队控制方法, 通过复杂的线性约束定义目标队形, 以一个额外的距离约束来保持编队刚性, 但该方法仅适用于平面内的编队控制。Trinh 等<sup>[14]</sup>提出了领导者-优先跟随者 (leader-first follower, LFF) 模式, 通过控制第一跟随者与领导者间距实现了在 3 维空间内编队的缩放, 该方法中, 跟随者仅使用了相对方位信息控制目标编队, 虽能形成预期队形, 但在沿航线飞行时, 会累积跟踪误差, 编队难以保持。为跟踪运动目标

收稿日期: 2024-07-02; 修回日期: 2024-08-18

第一作者: 张靖雯(1998—), 女, 江苏人, 硕士。

编队, Zhao 等<sup>[15]</sup>分别针对单积分器模型、双积分器模型和独轮车模型, 设计了 PI 控制律, 并提出仅基于方位信息下的避碰策略, 但该方法只有在领导者做匀速直线运动时才能保持编队队形。

笔者以长僚机架构为基础, 设计了基于方位刚性理论的交互拓扑结构, 提出一种能够跟踪速度时变目标编队的分布式编队控制算法。由于方位约束信息具有全局性, 在该算法下无法实现编队整体在空间内的旋转。为使编队队形与长机速度方向对齐, 将惯性坐标系下的全局信息转换为机体坐标系下的本地信息, 优化了方位对齐算法。验证了 2 维、3 维空间编队整体的缩放与旋转机动能力, 编队均可保持固定队形, 以较小的队形误差编队飞行。

### 1 问题描述

针对多无人机编队研究了“多长机-僚机”的控制架构, 提出基于方位刚性的编队算法, 使其在给定的方位约束下, 形成固定队形编队。结合一致性理论, 增加速度一致项, 使得当长机以时变速度飞行时, 队形仍能保持, 实现编队平移机动。通过调整 2 架长机之间间距, 僚机在此算法下保持与长机的方位约束关系, 实现编队队形的缩放。之后, 为实现队形的旋转, 使其与长机速度方向对齐, 将方位约束及对应投影面旋转到由统一的机体坐标系构成的局部坐标系。最终, 实现一个具有平移、旋转和缩放能力的固定队形编队。

#### 1.1 基础理论

假设一共有  $n$  架无人机, 在  $d$  维空间内编队飞行, 将无人机运动学模型简化为二阶积分模型:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}}_i(t) &= \boldsymbol{v}_i(t); \\ \dot{\boldsymbol{v}}_i(t) &= \boldsymbol{u}_i(t). \end{aligned} \quad (1)$$

式中: 无人机  $i$  的加速度输入为  $\boldsymbol{u}_i$ ; 位置  $\boldsymbol{p}_i \in R^d$ ; 速度  $\boldsymbol{v}_i \in R^d$ 。定义位置集合为  $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{p}_1^T, \boldsymbol{p}_2^T, \dots, \boldsymbol{p}_n^T]^T$ , 速度集合为  $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_1^T, \boldsymbol{v}_2^T, \dots, \boldsymbol{v}_n^T]^T$ 。

各无人机之间的交互拓扑关系可以用无向图  $G(V, \varepsilon)$  表示,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  为图中的顶点集,  $\varepsilon \in V \times V$  为边集。通过将无人机  $i$  的位置  $\boldsymbol{p}_i$  映射到顶点  $i$ , 可以将编队架构表示为  $G(\boldsymbol{p})$ 。当  $(i, j) \in \varepsilon$  时, 代表无人机  $i$  和无人机  $j$  之间存在通信拓扑, 无人机  $i$  的邻居集合为  $N_i \triangleq \{j \in V : (i, j) \in \varepsilon\}$ 。将无人机  $i$  相对于无人机  $j$  的相对方位信息表示为:

$$\boldsymbol{g}_{ij} = (\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j) / \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\|。 \quad (2)$$

为使控制算法具有普适性, 能将其从 2 维平面拓展到 3 维空间, 引入正交投影算子  $P: R^d \rightarrow R^{d \times d}$ <sup>[11]</sup>, 定义:

$$P_x \triangleq I_d - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}^T。 \quad (3)$$

式中:  $I_d$  为  $d$  维单位阵;  $P_x$  可以将任意向量投影到向量  $\boldsymbol{x}$  的正交补上。

性质: 任意给定 2 个非零向量  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^d$ , 当且仅当  $P_x \boldsymbol{y} = 0$  (或  $P_y \boldsymbol{x} = 0$ ) 时, 向量  $\boldsymbol{x}$  与  $\boldsymbol{y}$  相互平行。

#### 1.2 编队模型

假定目标编队架构为  $G(\boldsymbol{p}^*)$ , 期望的方位约束为  $\{\boldsymbol{g}_{ij}^*\}_{(i,j) \in \varepsilon}$ 。

定义 1 (无穷小方位刚性): 若给定一个编队架构  $G(\boldsymbol{p})$ , 当顶点  $\{\boldsymbol{p}_i\}_{i \in V}$  在任意方向上产生一个无穷小方位变化时, 编队队形不发生改变, 仅发生整体的平移和缩放, 则称  $G(\boldsymbol{p})$  为无穷小方位刚性架构。

图 1 中, 箭头代表无穷小方位运动, 黑色连接线代表各无人机之间的拓扑连接。图 1(a) 中, 当给定一个无穷小方位刚性运动时, 此架构仍能满足给定的方位约束, 但编队队形发生改变; 而图 1(b) 中, 编队队形仍能保持不变。为保证目标编队的唯一性, 其交互拓扑结构需满足无穷小方位刚性, 通过 Henneberg 构造法<sup>[12]</sup>可以得到满足定义 1 条件的刚性结构, 如图 2 所示。

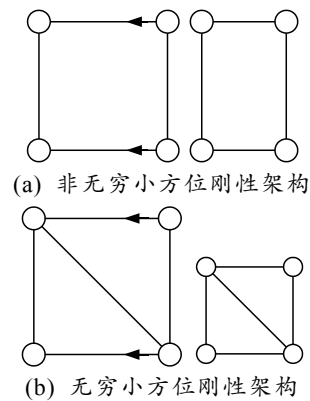


图 1 无穷小方位运动带来的变化

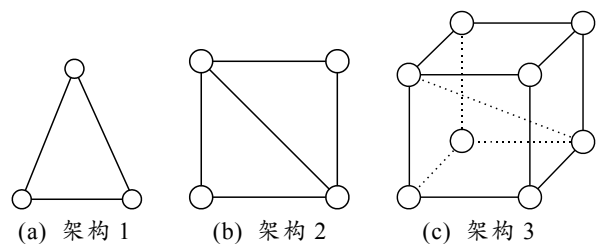


图 2 无人机间的交互拓扑

定义跟踪误差：

$$\begin{aligned}\delta_p(t) &= \mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_i^*(t); \\ \delta_v(t) &= \mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_i^*(t).\end{aligned}\quad (4)$$

若当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\delta_p \rightarrow 0$ ,  $\delta_v \rightarrow 0$ , 则可判定编队收敛到期望的几何图案。

## 2 固定队形编队的机动控制研究

### 2.1 基于方位刚性优化的编队方法

对于僚机  $i = \{3, 4, \dots, n\}$ , 所设计的控制算法需满足, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{g}_{ij}(t) \rightarrow \mathbf{g}_{ij}^*$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{E}$ 。为形成满足期望方位约束的目标编队, 笔者依据文献[11]提出的编队算法:

$$\mathbf{v}_i = -\sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}(t)} \mathbf{g}_{ij}^* \quad (5)$$

当且仅当无人机  $i$  和其邻机  $j$  之间的相对方位  $\mathbf{g}_{ij}(t)$  与期望的相对方位  $\mathbf{g}_{ij}^*$  平行时, 速度收敛为 0, 各无人机形成期望的编队队形。实际上, 编队飞行时, 僚机的速度无法收敛, 导致跟踪误差产生累积, 需对此加以改进。

为形成一个动态的、能够跟踪固定航迹的编队, 同时考虑到无人机加速度输入饱和问题, 在模型式(1)的基础上, 设计编队算法如下:

$$\begin{aligned}u_i &= \zeta_i^{-1} \text{sat} \left\{ -\sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}^*} \left[ k_p (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + k_v (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \right] \right\} + \\ &\quad \zeta_i^{-1} \sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}^*} \dot{\mathbf{v}}_j.\end{aligned}\quad (6)$$

式中:  $\zeta_i = \sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}^*}$ ;  $k_p$  和  $k_v$  为控制增益;  $\text{sat}(\cdot)$  为饱和函数; 控制输入  $u_i$  为无人机  $i$  的加速度。设计饱和函数:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} \beta, & x > \beta \\ x, & -\beta < x < \beta \\ -\beta, & x < -\beta \end{cases} \quad (7)$$

式中  $\beta > 0$  为  $x$  的上限。该算法主要由 3 部分构成。第 1 部分为方位约束项, 目的是将相对方位  $\mathbf{g}_{ij}(t)$  引导到与期望方位  $\mathbf{g}_{ij}^*$  对齐的位置, 其几何解释如图 3 所示, 无人机在该项的引导下, 从  $\mathbf{p}_i$  处向  $\mathbf{p}_i^*$  处移动, 由于  $\mathbf{p}_i^*$  与  $\mathbf{p}_j$  之间的向量与期望方位  $\mathbf{g}_{ij}^*$  平行, 即满足 UAV <sub>$i$</sub>  与 UAV <sub>$j$</sub>  之间的方位约束。第 2 部分为速度一致项, 根据一致性理论, 该项可令无人机与其邻机的速度趋于一致。第 3 部分为加速度反馈项, 其作用是消除包含长机加速度的项, 使其不影响编队

跟踪误差的收敛。

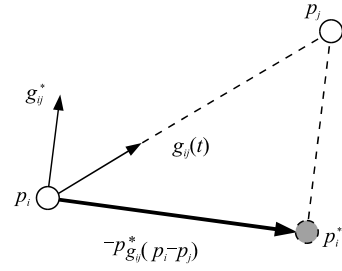


图 3 位置控制项的几何解释

### 2.2 方位对齐的编队旋转机动

在惯性坐标系下, 给定方位约束后, 各无人机之间的相对方位是固定的。这就意味着, 2 架长机必须保持全局方位约束, 并且无论长机的速度方向如何改变, 编队的架构固定不变, 无法与当前的速度方向同步旋转。在设计僚机控制律时, 需考虑到方位对齐问题, 即令僚机的航向与长机保持一致的同时, 满足在其局部坐标系下的方位约束。

在 1.1 节中, 将无人机简化为二阶积分模型, 为考虑到各无人机的航向角变化, 需对模型式(1)优化设计。

令无人机  $i$  的加速度大小为  $a_i$ , 速度大小为  $V_i$ , 方向角为  $\theta_i$ , 角速度为  $\omega_i$ 。通过方向角表示速度向量, 将其分解为横向和纵向, 控制输入  $u_i = [u_{xi}, u_{yi}]^T$ 。考虑到方向角的变化, 可将 UAV <sub>$i$</sub>  的速度向量表示为:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = [V_i \cos \theta_i \quad V_i \sin \theta_i]^T \quad (8)$$

通过对上式求导, 可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{xi} \\ \dot{u}_{yi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -V_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & V_i \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

当满足  $V_i \neq 0$  的条件时, 该模型可以表示为:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= [V_i \cos \theta_i \quad V_i \sin \theta_i]^T \\ \begin{bmatrix} a_i \\ \omega_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i / V_i & \cos \theta_i / V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (10)$$

为将方位约束与无人机的机体坐标系对齐, 定义 2 维平面内, 从 UAV <sub>$i$</sub>  的机体坐标系  $\Sigma_i$  旋转到惯性坐标系  $\Sigma_g$  的旋转矩阵  $\mathbf{Q}_i$  为:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

则可以得到  $\Sigma_j$  中的期望方位约束  $\tilde{\mathbf{g}}_{ij}^* = \mathbf{Q}_j^T \mathbf{g}_{ij}^*$ 。此时, 控制算法可写为:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_{xi}, \mathbf{u}_{yi}]^T = & \tilde{\zeta}_i^{-1} \text{sat} \left\{ - \sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}}^* [k_p (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + \right. \\ & \left. k_v (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)] \right\} + \tilde{\zeta}_i^{-1} \sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}}^* \dot{\mathbf{v}}_j. \end{aligned} \quad (12)$$

式中： $\tilde{\zeta}_i$  为局部的正交投影算子之和； $\mathbf{p}_i$  和  $\mathbf{v}_i$  为惯性坐标系下的位置与速度向量。在模型式(10)基础上，求得系统的纵横向加速度控制输入。

与算法式(6)相比，该控制方法将期望方位约束及其对应投影面旋转到邻机  $j$  的机体坐标系  $\Sigma_j$  下。

在速度一致项的作用下，各无人机的速度方向最终会趋于一致，即每架无人机的机体坐标系横纵轴方向相同，形成统一的局部坐标系。方位约束也随着速度方向的改变旋转到此局部坐标系内，整体编队随速度方向旋转，达到方位对齐的效果。

### 3 稳定性分析

定义 2：(方位拉普拉斯算子) 提出一个矩阵加权的图拉普拉斯矩阵，以表示目标编队中各无人机之间的交互拓扑关系以及目标编队的方位约束关系，将其称为方位拉普拉斯算子，用  $\mathbf{B}$  表示：

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{cases} 0_{d \times d}, & i \neq j, (i, j) \notin \mathcal{E} \\ -P_{g_{ij}}^*, & i \neq j, (i, j) \in \mathcal{E} \\ \sum_{k \in N_i} P_{g_{ik}}^*, & i = j, i \in V \end{cases}. \quad (13)$$

为便于分析，区分长机与长机、长机与僚机、僚机与僚机之间的方位约束，将  $\mathbf{B}$  分解为：

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ll} & \mathbf{B}_{lf} \\ \mathbf{B}_{fl} & \mathbf{B}_{ff} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

式中：下标  $l$  代表长机； $f$  代表僚机；子矩阵  $\mathbf{B}_{ff}$  是对称且正半定矩阵。

定理 1：当且仅当  $\mathbf{B}_{ff}$  非奇异时，僚机的期望位置及速度可以表示为：

$$\begin{cases} \mathbf{p}_f^* = -\mathbf{B}_{ff}^{-1} \mathbf{B}_{fl} \mathbf{p}_l \\ \mathbf{v}_f^* = -\mathbf{B}_{ff}^{-1} \mathbf{B}_{fl} \mathbf{v}_l \end{cases}. \quad (15)$$

证明：由于方位拉普拉斯矩阵  $\mathbf{B}$  与位置集合具有如下关系：

$$\mathbf{B} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}}^* (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (16)$$

根据性质易知  $\mathbf{B} \mathbf{p}^* = 0$ ，结合式(14)将其展开，则可以用长机的位置和速度及目标编队的方位约束关系表示僚机的期望位置和速度。

为便于描述，将饱和函数中的变量简写为  $\mathbf{X}$ ，即：

$$\mathbf{X} = - \sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}}^* [k_p (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) + k_v (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)]. \quad (17)$$

定理 2：僚机的加速度上下限取决于其与邻机之间的交互拓扑关系以及长机的加速度值，可将其表示为：

$$\|\dot{\mathbf{v}}_f\|_\infty \leq \|\mathbf{B}_{ff}^{-1}\|_\infty \|\text{sat}(\mathbf{X})\|_\infty + \|\mathbf{B}_{ff}^{-1} \mathbf{B}_{fl}\|_\infty \|\dot{\mathbf{v}}_l\|_\infty. \quad (18)$$

证明：式(6)两边同乘  $\zeta_i$ ，可得：

$$\sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}}^* (\dot{\mathbf{v}}_i - \dot{\mathbf{v}}_j) = \text{sat}(\mathbf{X}). \quad (19)$$

根据式(14)和(16)，推出其矩阵-向量形式：

$$\text{sat}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}_{ff} \dot{\mathbf{v}}_f + \mathbf{B}_{fl} \dot{\mathbf{v}}_l. \quad (20)$$

由于  $\mathbf{B}_{ff}$  异，僚机的加速度可以表示为：

$$\dot{\mathbf{v}}_f = \mathbf{B}_{ff}^{-1} \text{sat}(\mathbf{X}) - \mathbf{B}_{ff}^{-1} \mathbf{B}_{fl} \dot{\mathbf{v}}_l. \quad (21)$$

由此，可得出僚机加速度的上限取决于等式右边，即由目标编队的方位约束关系及长机加速度值决定。

定义 3：(标编队稳定性) 当  $t \rightarrow \infty$  时，跟踪误差  $\delta_p \rightarrow 0$ ， $\delta_v \rightarrow 0$ ，则称此时编队稳定。

当跟踪误差趋于 0 时，各无人机之间的相对距离满足由长机间距以及期望编队架构确定的期望间距；同时，编队中各无人机速度一致，表示各无人机以同一速度保持编队飞行。

根据定义 3，为证明在笔者提出的编队算法下，目标编队的稳定性，需要证明当  $t \rightarrow \infty$  时，跟踪误差  $\delta_p \rightarrow 0$ ， $\delta_v \rightarrow 0$ 。

将位置控制项简写为  $\alpha_i$  即：

$$\alpha_i \triangleq \sum_{j \in N_i} P_{g_{ij}}^* (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j). \quad (22)$$

对其求导得到速度控制项即  $\dot{\alpha}_i$ ，式(19)可写为：

$$\ddot{\alpha}_i = \text{sat}(-k_p \alpha_i - k_v \dot{\alpha}_i). \quad (23)$$

结合式(19)、(20)及(22)，可求得：

$$\alpha = \mathbf{B}_{ff} \mathbf{p}_f + \mathbf{B}_{fl} \mathbf{p}_l. \quad (24)$$

最后，将期望位置与速度式(15)代入上式，得到  $\alpha_i$  与  $\delta_p$ ， $\dot{\alpha}_i$  与  $\delta_v$  之间的关系如下：

$$\alpha = \mathbf{B}_{ff} \delta_p(t); \quad (25)$$

$$\dot{\alpha} = \mathbf{B}_{ff} \delta_v(t). \quad (26)$$

为证明系统跟踪误差  $\delta_p$  和  $\delta_v$  收敛于 0，仅需证明在  $t \rightarrow \infty$  时， $\alpha \rightarrow 0$ ， $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ 。

利用 Lyapunov 方法来证明编队稳定性，引入一

个积分函数：

$$\Phi(x) \triangleq \int_0^x \text{sat}(\tau) d\tau. \quad (27)$$

根据饱和函数  $\text{sat}(\mathbf{X})$  的性质可知, 对任意  $x \in R$ ,  $\Phi(x) \geq 0$ , 当且仅当  $x=0$  时,  $\Phi(x)=0$ . 给定向量  $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ , 此时,  $\Phi(\mathbf{x})$  的向量形式可写为:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \left[ \int_0^{x_1} \text{sat}(\tau) d\tau, \dots, \int_0^{x_m} \text{sat}(\tau) d\tau \right]^T. \quad (28)$$

选择 Lyapunov 函数如下:

$$V = \mathbf{1}^T \Phi(-k_p \alpha - k_v \dot{\alpha}) + \mathbf{1}^T \Phi(-k_p \alpha) + k_p \dot{\alpha}^T \dot{\alpha}. \quad (29)$$

结合式(28)可知:

$$\mathbf{1}^T \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^q \Phi(x_i) \geq 0. \quad (30)$$

通过式(23), 可以推出:

$$\dot{\alpha} = \Phi(-k_p \alpha_i - k_v \dot{\alpha}_i). \quad (31)$$

故  $\dot{\alpha}^T \dot{\alpha} \geq 0$ , 因此,  $V \geq 0$ , 当且仅当  $\alpha = \dot{\alpha} = 0$  时,  $V=0$ . 对 Lyapunov 函数求导可得:

$$\dot{V} = -k_v \dot{\alpha}^T \dot{\alpha} + k_p \dot{\alpha}^T (\text{sat}(k_p \alpha) - \text{sat}(k_p \alpha + k_v \dot{\alpha})). \quad (32)$$

由于饱和函数式(7)单调递增, 对任意 2 个向量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$ , 若  $\mathbf{y} \geq 0$ , 则  $\text{sat}(\mathbf{x}) - \text{sat}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq 0$ , 反之同理. 由此,  $\mathbf{y}^T [\text{sat}(\mathbf{x}) - \text{sat}(\mathbf{x} + \mathbf{y})] \leq 0$ , 故可推出  $\dot{V} \leq 0$ . 根据式(32)易知, 当  $\dot{V} = 0$  时,  $\alpha = \dot{\alpha} = 0$ ; 因此,  $\alpha$  和  $\dot{\alpha}$  均全局渐近稳定收敛于 0, 根据式(25)和(26), 得出结论, 跟踪误差  $\delta_p$  和  $\delta_v$  全局渐近稳定收敛于 0, 根据定义 3, 编队稳定.

由于在方位对齐的编队旋转机动算法中, 将方位约束从惯性坐标系旋转到由机体坐标系构成的编队本地坐标系中, 此时速度误差  $\delta_v$  可表示为:

$$\delta_v = \begin{bmatrix} V_i \cos \theta_i - V_i^* \cos \theta_i^* \\ V_i \sin \theta_i - V_i^* \sin \theta_i^* \end{bmatrix}. \quad (33)$$

故当  $\delta_v \rightarrow 0$  时, 速度大小与期望速度一致, 方向角  $\theta$  与期望方向一致, 即表示各无人机速度方向对齐, 形成统一的局部坐标系; 此时, 若  $\delta_p \rightarrow 0$ , 即认为目标编队完成了对应的旋转, 满足定义 3, 达到编队稳定.

为证明方位对齐后, 编队仍能保持稳定, 需将定义 2 提出的方位拉普拉斯算子本地化, 通过旋转矩阵, 将惯性系中的方位约束  $g_{ij}^*$  替换为局部坐标系中的向量  $\tilde{g}_{ij}^*$ , 并以  $\tilde{g}_{ij}^*$  的投影面替换  $P_{g_{ij}^*}$ . 在此局部的方位约束以及对应投影面下, 证明当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\delta_p \rightarrow 0$  且  $\delta_v \rightarrow 0$ . 具体证明过程与上述证明一致, 最

终可证得编队稳定.

### 4 仿真实验

笔者的研究对象为固定翼无人机, 选取 UAV<sub>1</sub> 和 UAV<sub>2</sub> 作为长机, 以方块表示, 其余为僚机, 以圆点表示, 统一各无人机参数如表 1 所示. 为验证笔者提出编队控制算法的可行性, 假定 4 种编队情形.

表 1 无人机参数设置

描述	数值
位置项系数 $k_p$	1
速度项系数 $k_v$	3
速度限制 $(V_{\min}, V_{\max})/(\text{m/s})$	[50, 100]
加速度限制 $(a_{\min}, a_{\max})/(\text{m}^2/\text{s}^2)$	[-6, 6]

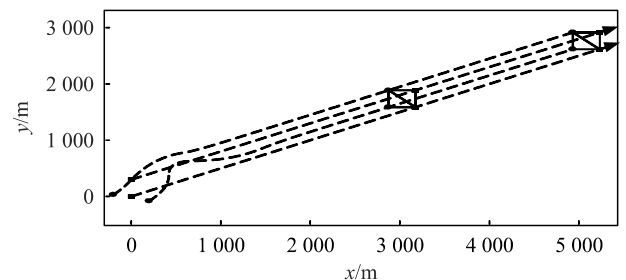
表 2 2 维平面内无人机的初始状态

UAV <sub>i</sub>	$p_i/\text{m}$	$v_i/(\text{m/s})$
1	(0, 300)	(60, 30)
2	(0, 0)	(60, 30)
3	(-200, 30)	(50, 50)
4	(200, -80)	(50, 50)

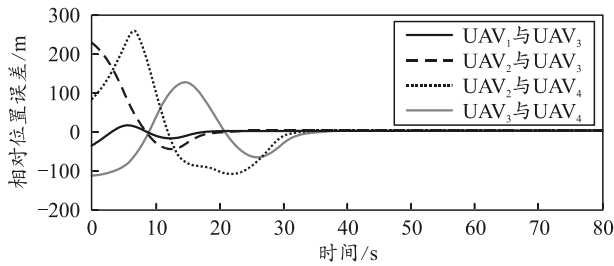
1) 针对 3.1 节中提出的算法, 取 2 架僚机( $i=3, 4$ ), 与长机协同形成正方形编队, 其交互拓扑结构如图 2(b)所示. 给定初始条件如表 2 所示, 验证在该算法控制下, 僚机跟随时变速度长机, 在 2 维平面内的编队形成与保持能力.

仿真共进行 80 s, 在 55~60 s 给定 2 架长机加速度向量为  $(4, 2) \text{ m}^2/\text{s}^2$ , 其余时间段长机的加速度大小为 0. 仿真结果如图 4 所示, 编队飞行过程可分为 2 个阶段. 0~53 s 为队形形成阶段, 53~70 s 为编队保持阶段. 在编队保持阶段, 即图 4(a)中虚线处至终点段, 可以发现此阶段中, 长机的速度变化并不影响编队的稳定. 无人机之间的距离与由长机间距决定的期望距离之间误差保持在 0.01 m 之内, 各无人机之间的速度差收敛到 0.01 m/s 内, 编队保持在一个如定义 3 所述的稳定状态.

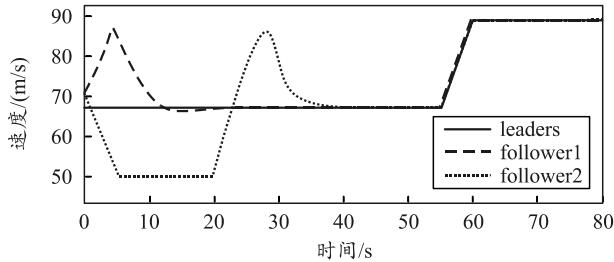
2) 为检验将该算法推广到 3 维空间内编队的可行性, 给定 6 架僚机( $i=3, \dots, 8$ ), 在 3 维空间内形成正方体队形, 拓扑结构如图 2(c), 初始状态如表 3 所示.



(a) 无人机编队飞行轨迹



(b) 无人机与邻机之间的位置误差



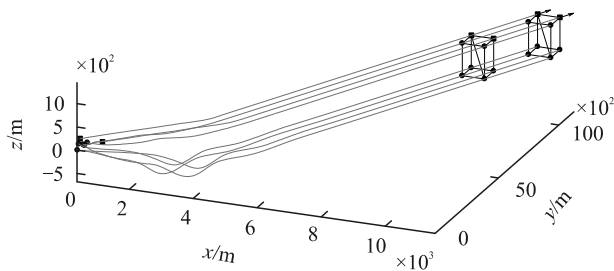
(c) 无人机的速度变化曲线

图 4 2 维平面编队仿真结果

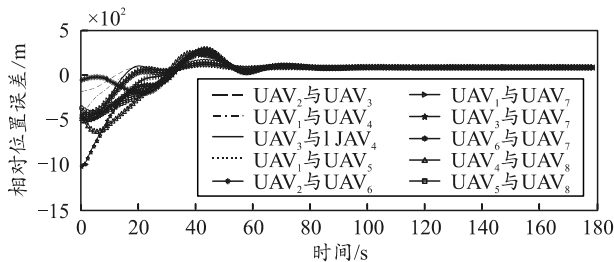
表 3 3 维空间内无人机的初始状态

UAV <sub>i</sub>	$p_i/m$	$v_i/(m/s)$
1	(0, 200, 200)	(50, 50, 0)
2	(700, 200, 200)	(50, 50, 0)
3	(250, 150, 150)	(50, 0, 0)
4	(150, 60, 120)	(50, 0, 0)
5	(-10, 120, 100)	(50, 0, 0)
6	(180, 80, -10)	(50, 0, 0)
7	(120, 250, 50)	(50, 0, 0)
8	(0, 0, 0)	(50, 0, 0)

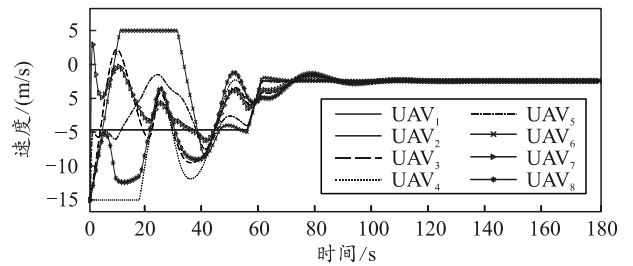
仿真结果如图 5 所示, 共进行 180 s。55~60 s 给定长机的加速度为  $(2, 2, 2) m^2/s$ , 其余时间段加速度大小为 0。0~156 s 为协同阶段, 僚机根据给定的方位约束跟随长机形成编队; 在 156~180 s 保持距离误差在 0.01 m 内, 各无人机速度差在 0.01 m/s 内, 编队稳定, 即表示该方法在 3 维空间内依旧适用。



(a) 无人机编队飞行轨迹



(b) 无人机与邻机之间的位置误差

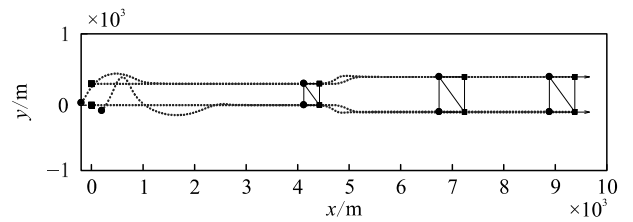


(c) 无人机的速度变化曲线

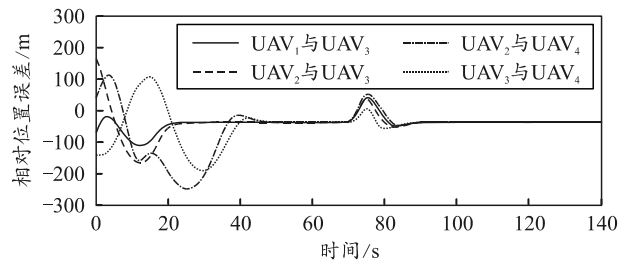
图 5 3 维空间编队仿真结果

3) 通过调整 2 架长机的间距, 改变编队的比例因子, 以此调整各无人机之间的期望间距, 检验编队的缩放机动能力。

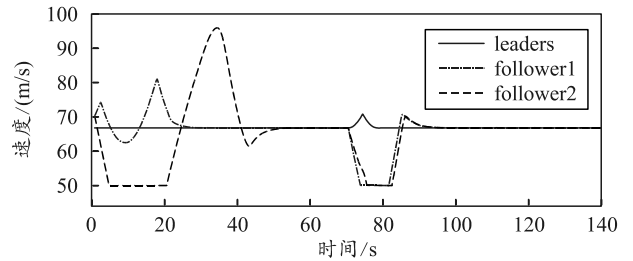
仿真结果如图 6 所示, 各无人机的初始状态如表 2 所示。令长机的初始速度方向沿  $x$  轴正向, 在 70~78 s, 赋予 2 架长机大小为  $6 m^2/s$ , 方向相反的纵向加速度, 使其间距从 300 m 增加到 492 m。在 0~66 s, 形成一边长为 300 m 的正方形编队, 并在 66~70 s 保持 0.01 m 精度的距离误差; 70~110 s, 由于 2 架长机的加速度方向不同, 速度方向不一致, 僚机位置调整, 重新形成边长为 492 m 的稳定正方形编队。



(a) 无人机编队飞行轨迹



(b) 无人机与邻机之间的位置误差



(c) 无人机的速度变化曲线

图 6 队形缩放仿真结果

4) 为实现编队的旋转机动, 在惯性坐标系中给定各无人机之间的方位约束如下:

$$g_{21}^* = [0 \quad -1], \quad g_{31}^* = [-1 \quad 0], \quad g_{32}^* = [-\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2], \\ g_{42}^* = [-1 \quad 0], \quad g_{43}^* = [0 \quad -1].$$

仿真结果如图7所示。第73 s处，各无人机的距离误差保持在0.01 m范围内，速度误差保持在 $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ 范围，编队稳定。与情形一相比可发现，该队形整体发生了旋转，最终目标编队与速度方向对齐。

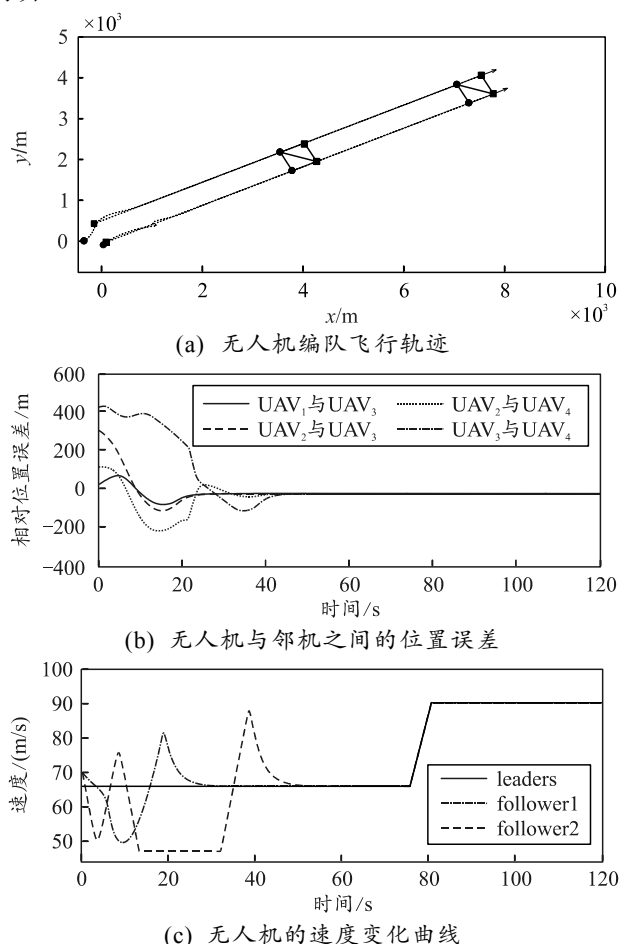


图7 考虑方位对齐情况下的仿真结果

以上4种情形验证了笔者提出算法在编队形成与保持上的能力较好，具有在多维度空间内的适用性，并能够实现编队整体的平移、旋转与缩放机动。

## 5 结论

为实现多无人机固定队型编队，笔者基于方位刚性理论，建立刚性的交互拓扑结构，通过正交投影算子使算法可拓展到多维空间。为使编队架构具有缩放和旋转的能力，选取“多长机-僚机”模式，使编队能够根据长机之间距离变化实现缩放；增加方位对齐功能，使编队方向与长机速度方向对齐，

实现编队架构的整体旋转，实现了机动编队。

## 参考文献：

- [1] 吴捷, 胡盛华, 乔莎莎, 等. “忠诚僚机”式有人/无人机协同作战概念与任务管理技术研究[J]. 航空电子技术, 2021, 52(2): 27-31.
- [2] 袁成, 董晓琳, 朱超磊. 2020年国外先进军用无人机技术发展综述[J]. 飞航导弹, 2021(1): 17-24.
- [3] 牛轶峰, 沈林成, 李杰, 等. 无人-有人机协同控制关键问题[J]. 中国科学: 信息科学, 2019, 49(5): 538-554.
- [4] 宗群, 王丹丹, 邵士凯, 等. 多无人机协同编队飞行控制研究现状及发展[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2017, 49(3): 1-14.
- [5] 王祥科, 刘志宏, 丛一睿, 等. 小型固定翼无人机集群综述和未来发展[J]. 航空学报, 2020, 41(4): 20-45.
- [6] KWANG-KYO O, MYOUNG-CHUL P, HYU-SUNG A. A survey of multi-agent formation control[J]. Automatica, 2015, 53(3): 424-440.
- [7] 马子玉, 何明, 刘祖均, 等. 无人机协同控制研究综述[J]. 计算机应用, 2021, 41(5): 1477-1483.
- [8] BISHOP A N. Distributed bearing-only formation control with four agents and a weak control law[C]//IEEE International Conference on Control & Automation. IEEE, 2011.
- [9] SCHIANO F, FRANCHI A, ZELAZO D, et al. A rigidity-based decentralized bearing formation controller for groups of quadrotor UAVs[C]//Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2016.
- [10] DONG Y Y, DONG C X, LIU W, et al. “2-D DOA Estimation for L-Shaped Array With Array Aperture and Snapshots Extension Techniques[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(4): 495-499.
- [11] ZHAO S Y, ZELAZO D. Bearing Rigidity and Almost Global Bearing-Only Formation Stabilization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(5): 1255-1268.
- [12] ZHAO S Y, ZELAZO D. Bearing Rigidity Theory and Its Applications for Control and Estimation of Network Systems: Life Beyond Distance Rigidity[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2019, 39(2): 66-83.
- [13] LIN Z Y, WANG L L, HAN Z M, et al. Distributed Formation Control of Multi-Agent Systems Using Complex Laplacian[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(7): 1765-1777.
- [14] TRINH M H, ZHAO S Y, SUN Z Y, et al. Bearing-Based Formation Control of A Group of Agents with Leader-First Follower Structure[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019(2): 598-613.
- [15] ZHAO S Y, LI Z H, DING Z T. Bearing-Only Formation Tracking Control of Multiagent Systems[J]. IEEE Trans. Automat. Contr, 2019, 64(11): 4541-4554.