

doi: 10.7690/bgzd.2025.03.019

基于排队论 M/G/s 模型的行李分拣 AMR 系统配置数量计算方法研究

龙 毅¹, 徐小波¹, 李光飞¹, 吝特高¹, 常 敏¹, 刘 勇²

(1. 民航成都物流技术有限公司规划设计部, 成都 610000;

2. 民航成都物流技术有限公司市场客服部, 成都 610000)

摘要: 针对机场行李分拣技术在国内尚处于起步阶段问题, 提出基于运筹学排队论理论, 对行李分拣 AMR 系统的分拣过程进行分析, 建立一套简化可行的 M/G/s 模型。通过借鉴国内外 M/G/s 近似扩散算法模型, 加入了排队机、充放电效率等关键影响参数, 根据机场行李系统的特殊性需求建立了近似求解算法模型, 对行李分拣 AMR 系统的 AMR 配置数量进行了计算预测。结果表明: 该模型方法的计算结果与 Flexsim 仿真结果基本一致, 能够作为行李分拣 AMR 系统规划设计过程中的数量评估方法, 对行李分拣 AMR 系统的规划设计具有指导性意义。

关键词: 排队论; M/G/s; AMR; 行李分拣

中图分类号: V35 **文献标志码:** A

Research on Method of Calculating Number of AMR System Configuration Based on M/G/s Model of Queue Theory

Long Yi¹, Xu Xiaobo¹, Li Guangfei¹, Lin Tegao¹, Chang Min¹, Liu Yong²

(1. Department of Planning and Design, Civil Aviation Logistics Technology Co., Ltd., Chengdu 610000, China;

2. Department of Market Customer Service, Civil Aviation Logistics Technology Co., Ltd., Chengdu 610000, China)

Abstract: In view of that problem that the airport baggage sorting technology is still at the initial stage in China, the sorting process of the baggage sorting AMR system is analyzed based on the queue theory of operational research, and a set of simplified and feasible M/G/s models is established. By referring to the M/G/s approximate diffusion algorithm model at home and abroad, the key parameters such as queuing machine and charging and discharging efficiency are added, and the approximate solution algorithm model is established according to the special needs of the airport baggage system, and the AMR configuration number of the baggage sorting AMR system is calculated and predicted. The results show that the calculation results of the model method are basically consistent with the Flexsim simulation results, and it can be used as a quantitative evaluation method in the planning and design process of the baggage sorting AMR system, which has a guiding significance for the planning and design of the baggage sorting AMR system.

Keywords: queuing theory; M/G/s; AMR; baggage sorting

0 引言

随着我国经济持续快速发展, 越来越多的旅客选择空中交通出行, 据统计, 2018 年我国民用机场年旅客吞吐量达到了 12.6 亿人次, 近十年来的年均增长率达到了 11%^[1]。

行李处理系统作为机场内最大的单体系统, 包括值机、安检、输送、分拣、储存、中转、装载、到港、控制等 10 个子系统, 是机场建设最重要的系统之一^[2]。而行李分拣技术作为行李处理系统的最核心技术, 已完成了从人工、转盘、TTS 到 ICS 的 4 次技术革新, 第五代 AMR 智能分拣技术, 是实现行李分拣技术由自动化向智能化突破的方向, 而相关规划设计方法及技术储备, 国内外尚处于起步阶段。

1 国内外研究现状

目前, 国内外对于 AMR 系统配置数量的计算方法主要为解析法。

解析法是将具体问题归纳整理后形成抽象的数学模型, 并通过对模型计算求解获得小车数量配置需求的一种规划方法, 通常分为静态解析法和动态解析法^[3]。

以上 2 种方法所采用的模型差异可以通过图 1 进行简单说明。

静态解析法模型中, 视顾客到达及服务时间为静态值, 装卸站点与指定的 AMR 小车形成固定的客户与服务组合子系统, AGV 小车可以是单台也可以是多台, 路径设置也是固定的, 路径可以是单条, 也可以是多条, AMR 小车将在这些预先规划的特定

收稿日期: 2024-07-04; 修回日期: 2024-08-13

第一作者: 龙 毅(1990—), 男, 四川人, 硕士。

路径中,按照运输需求完成送料响应,各个子系统之间相互独立,控制系统的逻辑非常简单。

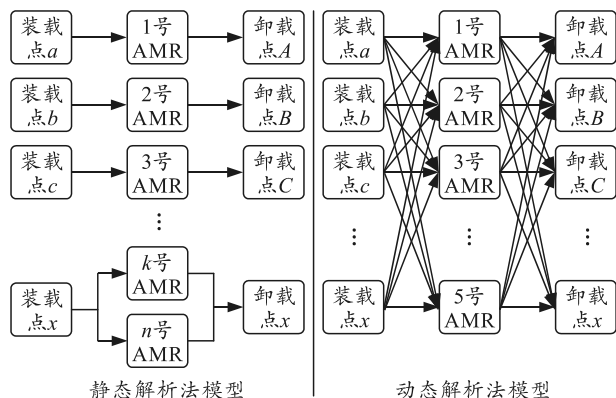


图1 解析法模型

该方法计算结果可信度较低,适用于项目前期规划,根据路径规划和AMR基本性能,运用公式快速估算AMR小车配置数量。

动态解析法模型中,需要考虑顾客到达间隔及服务时间的分布情况,将AMR系统视为动态整体进行调度,由上位系统根据一定的任务分配及调度逻辑,实时分解并分配服务任务至AMR小车,由单一或多台AMR小车组合完成服务响应。动态解析法模型中的控制系统逻辑较为复杂,AMR小车的每次行驶路径是动态规划的,由上位系统和小车随车控制系统协同,完成行驶路径的实时规划选择。

动态解析法因其需要考虑的影响因素较为复杂,通常需要对其诸多影响因子进行一定程度的简化,国内外相关研究理论模型较多,根据不同的数学模型有不同的计算及评价公式。

国外对AMR系统配置数量的研究起步较早。1983年,Muller^[4]提出了基于运输时间以及运输频次需求的简单数学公式来计算数量配置。1987年,Egbelu^[5]依据路径规划、装卸点设置和调度策略建立了AMR数量计算模型。同年,Tanchoco等^[6]基于AMR系统的稳态建立了一个基于排队论的估算模型。1994年,Scrivanasan等^[7]分析了当AGV的调度规则为FCFS(先来先服务)时AGV的数量估计。2000年,Arifin等^[8]运用统计学方法建立回归模型来计算AMR数量。2001年,Vis等^[9]利用网络图建立了一种整数线性规划模型求解AMR数量配置。2003年,Talbot^[10]基于系统服务效率根据排队论建立了AMR数量配置模型。

国内相关研究起步较晚,2001年,王冰等^[11]研究了不同的调度规则 and 不同交通管理下的AGV数量估算,但未考虑到服务需求的随机性问题;

2013年,刘洋等^[12]根据排队论M/M/1及M/M/s数学模型来求解物流系统中所含AMR小车的最优数量,但其模型仅适用于服务时间服从负指数分布的工况,与一般工况差别较大,应用范围十分有限。

2 排队论 M/G/s 模型

笔者基于运筹学排队论理论开展行李分拣系统AMR数量配置的研究。

排队论,是研究系统随机聚散现象和随机服务系统工作过程的数学理论和方法,又称随机服务系统理论,为运筹学的一个分支。

排队过程包含输入过程、排队规则、服务机构3部分,排队模型结构如图2所示。顾客在到达服务机构前,若无排队则直接接受服务后离去;若有排队则遵循排队规则和服务规则,通过排队结构依次获得服务后离去。

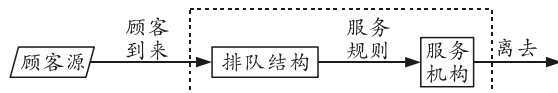


图2 排队模型结构

M/G/s模型的排队系统是实际生产服务系统中一类比较常见的排队系统,其中顾客到达过程为泊松过程,服务规则先到先服务,服务时间独立且服从一般分布,系统有 m 个平行服务台。由于M/G/s排队系统不具备马尔可夫性,目前关于该系统的研究仅局限于近似分析,尚未有文献能给出其准确的概率分布函数^[13]。国内外研究人员提出了许多方法来逼近其解。

Kimura^[14]提出了一种M/G/m队列的近似扩散模型。其主要思想是将离散排队过程 $\{Q(t)|Q(t)=0,1,\dots\}$ (即系统中包括服务中的顾客数)近似为连续扩散过程 $\{X(t)|X(t)\geq 0\}$ 。

Yao^[15]提出了一个改进型扩散近似模型,保留了无穷小均值和方差的分段连续公式,修改了其边界,给出了扩散方程的基本条件和求解方法。

在M/G/m排队系统中,假设系统能够达到平稳状态,顾客遵守先到达先服务的规则,系统的容量无限大,顾客不会成批到达,顾客到达服从泊松分布,顾客的到达率为 λ ,记 C_s^2 是变量 E_s 的平方变异系数。

$$C_s^2 = \sigma^2(s)/E_s^2 \quad (1)$$

式中: $\sigma(s)$ 为服务时间的标准差; E_s 为平均服务时间。

系统有 m 个平行服务台,每个服务器的平均服

务率为 μ ，服务强度 $\rho = \lambda / m\mu$ ，显然只有当 $\rho < 1$ 时，系统才能达到稳态，否则排队队伍将无限长。

记 π_k 为系统达到平稳状态时队长 (包含系统中正在接收服务的顾客和正排队等待的顾客) 为 $k(k=0, 1, 2, \dots)$ 的概率，其表达形式为：

$$\pi_1 = \pi_0 (\theta_1 / r_1) [\exp(r_2 / 2) - \exp(-r_1 / 2)] \quad (2)$$

$$\pi_k = \pi_0 \theta_m, \quad k=1, 2, 3, \dots, m$$

$$\pi_k = -\pi_0 \theta_m \rho / (1-\rho) \cdot [\exp(r_m(k-m)) - \exp(r_m(k-1-m))], \quad k \geq m+1; \quad (3)$$

$$\pi_0 =$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \theta_k + \frac{\theta_m}{1-\rho} + \frac{m\rho}{r_1} \left[\exp\left(\frac{r_1}{2}\right) - \exp\left(-\frac{r_1}{2}\right) - r_1 \right] \right\}^{-1} \quad (4)$$

式中： $\theta_k = (m\rho)^k / k!$ ， $k=1, 2, \dots, m$ ； $r_k = 2b_k / \alpha_k$ ， $k=1, 2, \dots, m$ ； $\alpha_k = \lambda + k\mu c_s^2$ ； $b_k = \lambda - k\mu$ 。

3 行李分拣 AMR 系统建模

3.1 行李到达时间间隔

在机场行李分拣 AMR 系统中，行李到达时间间隔具有以下特点：

1) 在不相重叠的时间区间内行李到达数是相互独立的，即满足无后效性。

2) 对充分小的 Δt ，在时间区间 $[t, t+\Delta t)$ 内有一个顾客到达的概率与 t 无关，而且约与区间长 Δt 成正比，即：

$$P_1(t, t+\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (5)$$

式中：当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $o(\Delta t)$ 为关于 Δt 的高阶无穷小； $\lambda > 0$ 为常数，表示单位时间有一个顾客到达的概率，称为概率强度。

3) 对于充分小的 Δt ，在时间区间 $[t, t+\Delta t)$ 内有 2 个或 2 个以上顾客到达的概率极小，可以忽略。

根据上述 3 个特征，可以得出行李的到达形成泊松流，则行李相继到达时间间隔服从参数为 λ_n 的负指数分布。

3.2 服务台数量

行李分拣 AMR 系统中通常配置有 M 个装载台， m 台 AMR， N 个卸载口。AMR 分拣系统具有以下特点：一台 AMR 一次只能搬运一件行李。为了能够保障 AMR 装载效率，减少装载排队，行李运输输送线通常均采取了交互连接设计，当单个装载口行李数量堆积时，控制系统将采取分流措施，将后续行李自动分送到其他装载口位置；因此，对于行李 AMR 分拣系统，服务台数量为 AMR 数量 m 。

3.3 行李 AMR 服务时间

行李 AMR 分拣系统路径规划与现场可行域息息相关，受调度算法、AMR 数量、堵塞等因素影响。为了简化对单台 AMR 运输时间的评估，笔者将 AMR 从行李装载点到卸载点通过路径长度的理论平均时间作为单个 AGV 的服务时间，忽略因调度、堵塞、避让、故障等导致的运输时间波动。

机场 AMR 分拣系统服务时间可以粗略估算为从 M 个装载点到 N 个卸载点，具有 $M \times N$ 种明确的路径长度，相邻 2 次 AMR 的服务时间完全独立，即行李 AMR 服务时间服从一般分布。

3.4 行李分拣 AMR 系统排队建模

行李分拣 AMR 系统的标准模型如图 3。

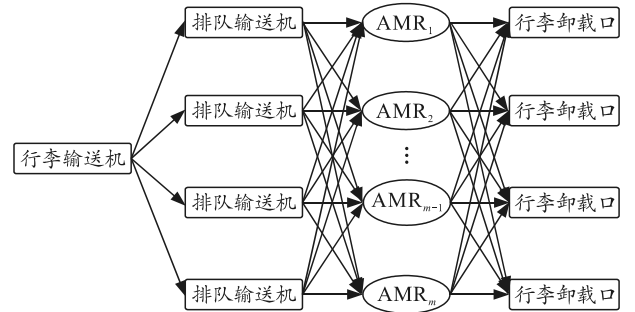


图3 行李分拣 AMR 系统标准模型

根据排队论 P-K 公式， L_q 、 L_s 、 W_s 、 W_q 等仅依赖于 ρ 和服务时间的方差 σ^2 ，而与分布的类型没有关系；因此，可以将该模型简化为如图 4 所示。

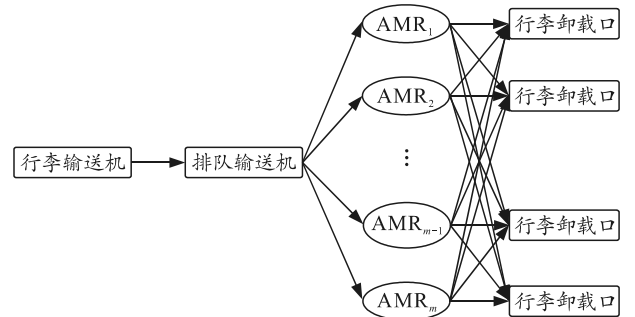


图4 行李分拣 AMR 系统简化模型

上述简化后的 M/G/m 模型完全符合 Yao 提出的改进型扩散近似模型，则系统达到稳态时的概率分布可以利用其相关公式进行趋近求解。

通常行李 AMR 分拣系统配置有 M 个装载口，每个装载口配置 $\varnothing$ 台排队输送机。

则该排队系统中允许最大行李容量 ζ 为：

$$\zeta = m + M \times \varnothing \quad (6)$$

该行李分拣 AMR 系统达到稳态运行时不引起行李输送机堵塞的概率为：

$$c(\zeta, \rho) = \sum_{n=\zeta+1}^{+\infty} \pi_n. \quad (7)$$

记系统中 AMR 的平均工作数量为 $\bar{m}$ ，则

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^{+\infty} \pi_k \times k. \quad (8)$$

AMR 需要定期进行充电维护，通常每工作 τ 小时需要充电 ε 小时。则 AMR 充放电系数为：

$$\omega = \varepsilon / (\tau + \varepsilon). \quad (9)$$

为保障每台 AMR 有足够的时间进行充放电维护，则系统内 AMR 配置数量 m 应满足：

$$m \geq \bar{m} / \omega. \quad (10)$$

根据民航要求行李系统可靠性不低于 99.99% 的要求，则系统中 m 的取值为：

$$m = \max \left\{ \zeta - M \times \varphi, \frac{\bar{m}}{\omega} \right\} \quad \text{s.t.} \quad c(\zeta, \rho) \leq 0.01\%. \quad (11)$$

4 验证求解

为了验证笔者提出的规划设计计算方法可信有效，笔者基于某机场实际项目 AMR 分拣系统，通过传统静态解析法、基于排队论 M/G/s 的动态解析法以及 FLEXSIM 仿真进行分析对比验证。

4.1 传统静态解析法

采用静态解析法对本行李分拣 AMR 系统进行校核计算，为简化计算过程，假设：本系统中行李到达各个距离的出口数量均分一致；本系统中行李等间隔时间到达。则小车数量计算公式如下：

$$C = \sum_i [T_r / T_a]^+ / \varphi \omega. \quad (12)$$

式中： T_a 为物料需求时间（单次响应时间间隔），2.5 s； T_r 为小车完成一次物料搬运过程总时间（不考虑堵塞），取平均值 60 s； φ 为小车因系统中的交通

控制避碰等因素产生的等待损失，0.8； ω 为小车充电修正系数（因充电过程产生的有效工作时间损失），0.84；则 $C=35.7$ ，取整可得 36。则利用静态解析法可得，该行李分拣 AMR 系统所需 AMR 数量为 36 套。

4.2 基于排队论 M/G/s 的动态解析法

分拣系统平面布局如图 5 所示，各装卸载路径输送时间统计结果如表 1 所示。

表 1 运输时间计算结果 s

装载口	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
M_1	44.5	44.5	44.5	44.5	44.5	44.5	64.5	64.5
M_2	70.5	70.5	70.5	70.5	70.5	52.0	46.0	46.0
M_3	111.0	111.0	111.0	111.0	111.0	90.0	84.5	84.5
装载口	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}	N_{16}
M_1	64.5	64.5	64.5	68.0	111.0	111.0	111.0	111.0
M_2	36.0	36.0	36.0	41.5	74.0	74.0	74.0	74.0
M_3	74.0	74.0	74.0	74.0	74.0	44.5	40.5	40.5
装载口	N_{17}	N_{18}	N_{19}	N_{20}	N_{21}	N_{22}		
M_1	111.0	111.0	131.0	131.0	131.0	131.0		
M_2	74.0	74.0	94.5	94.5	94.5	94.5		
M_3	40.5	44.5	61.0	61.0	61.0	61.0		

相关设计输入数据如下：

高峰小时流量：1 440 件/小时；

装载口数量：4；

AMR 平均输送时间：75 s；

AMR 输送时间方差：40。

则：

$$\lambda = 1\,440 / 3\,600 = 0.4 \text{ 件/秒},$$

$$\mu = 1 / 75 = 0.013\,333,$$

$$\sigma = 40,$$

$$c_s^2 = 40^2 / 75^2 = 0.284\,44,$$

$$M = 4.$$

根据排队论基本原理，只有当服务强度 $\rho = (\lambda / m\mu) < 1$ 时，系统才能达到稳态，否则排队队伍将无限长。

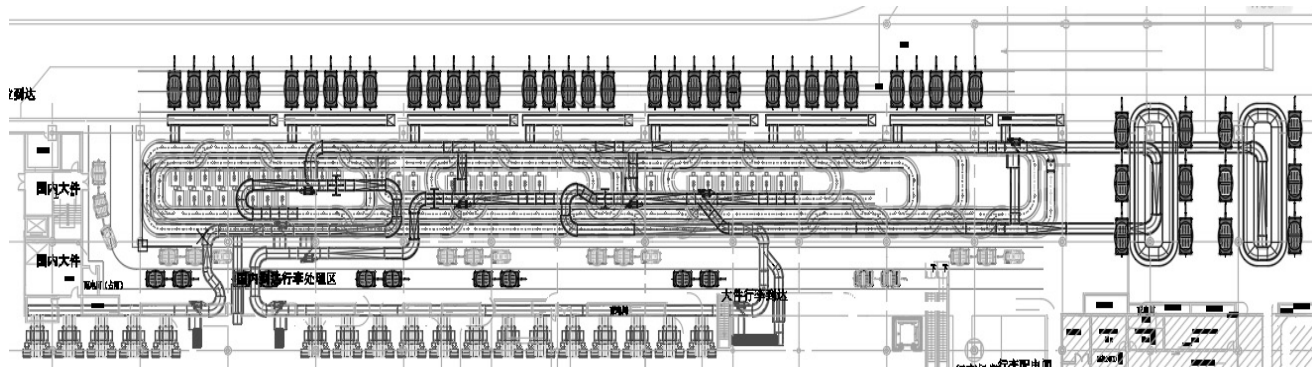


图 5 行李分拣 AMR 系统布局

因此 $m > 30$ 。采用 Matlab 进行数值模拟，分别计算当系统配置服务 AMR 数量 $m=30, 31, \dots, 40$

时，可得当系统达到稳态时堵塞概率 c ，服务队列中行李平均数量 L_s 、平均排队长度为 $E(L_q)$ 及平均工

作 AGV 数量 $\bar{m}$ 。

Matlab 数值模拟计算结果如表 2 所示。系统拥堵概率 AMR 数量增加而降低, 概率变化趋势如图 6 所示。

表 2 Matlab 数值模拟结果

序号	m	$c/\%$	L_s	$E(L_q)$	$\bar{m}$
1	31	29.026 9	25.361 0	15.40	26
2	32	7.637 2	31.319 4	6.80	32
3	33	2.118 7	31.882 8	3.16	32
4	34	0.558 5	31.468 5	1.82	32
5	35	0.163 5	30.946 5	1.10	31
6	36	0.045 4	30.657 5	0.68	31
7	37	0.012 6	30.423 3	0.43	31
8	38	0.003 5	30.270 2	0.27	31
9	39	0.001 0	30.171 4	0.17	31
10	40	0.000 1	30.171 6	0.17	31

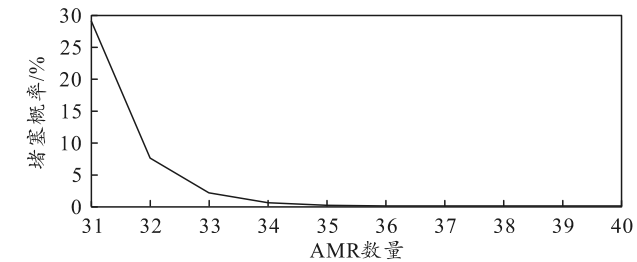


图 6 AMR 数量-堵塞概率曲线

根据机场行李系统可靠性基本要求, 系统稳定性要求不低于 99.99%, 因此本行李 AMR 分拣系统中所需配置 AMR 最低数量为 38 套, 当 $m=38$ 时, 系统稳态概率分布如图 7 所示。

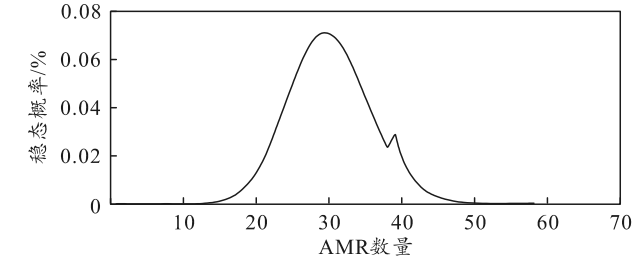


图 7 当 $m=38$ 时的稳态概率分布曲线

当 AMR 配置数量为 38 套时, 系统平均工作 AMR 数量 $\bar{m}=31$ 。结合 AMR 充放电系数, 为保障有足够的充电维护时间, 则最低 AMR 数量配置为:

$$31 \times 1.16 = 36.9 = 37 \text{ 套。}$$

则:

$$m = \max \{ \zeta - M \times \partial, \bar{m} / \omega \} = 38 \text{ 套。}$$

综上所述, 为保障本套行李分拣 AMR 系统可靠性不低于 99.99%, 且有足够的充电维护保养时间, AMR 最低配置数量为 38 套。

4.3 FLEXSIM 仿真验证

利用仿真软件 FLEXSIM 对本套行李分拣 AMR 系统进行建模仿真验证, 建立仿真模型如图 8 所示, 相关航班数量、旅客人数及行李量参如表 3 所示。

表 3 FLEXSIM 仿真数据表

航班号	分配目的地	计划时刻	计划时间/s	旅客量	行李量
***547	1	6:05:00	7 500	300	166
***380	3	6:10:00	7 800	300	166
***381	5	6:10:00	7 800	300	166
***573	7	6:10:00	7 800	300	166
***657	2	6:10:00	7 800	300	166
***477	4	6:15:00	8 100	300	166
***877	6	6:25:00	8 700	300	166
***987	8	6:25:00	8 700	300	166
***995	9	6:25:00	8 700	300	166
***757	1	6:35:00	9 300	300	166
***377	3	6:40:00	9 600	300	166
***905	5	6:45:00	9 900	300	166
***555	7	6:50:00	10 200	300	166
***369	2	7:00:00	10 800	300	166
***991	4	7:00:00	10 800	300	166
***701	6	7:05:00	11 100	300	166
***785	8	7:05:00	11 100	300	166
***888	9	7:10:00	11 400	300	166
***997	1	7:10:00	11 400	300	166
***857	3	7:15:00	11 700	300	166
***635	5	7:15:00	11 700	300	166
***013	7	7:20:00	12 000	300	166
***931	2	7:20:00	12 000	300	166

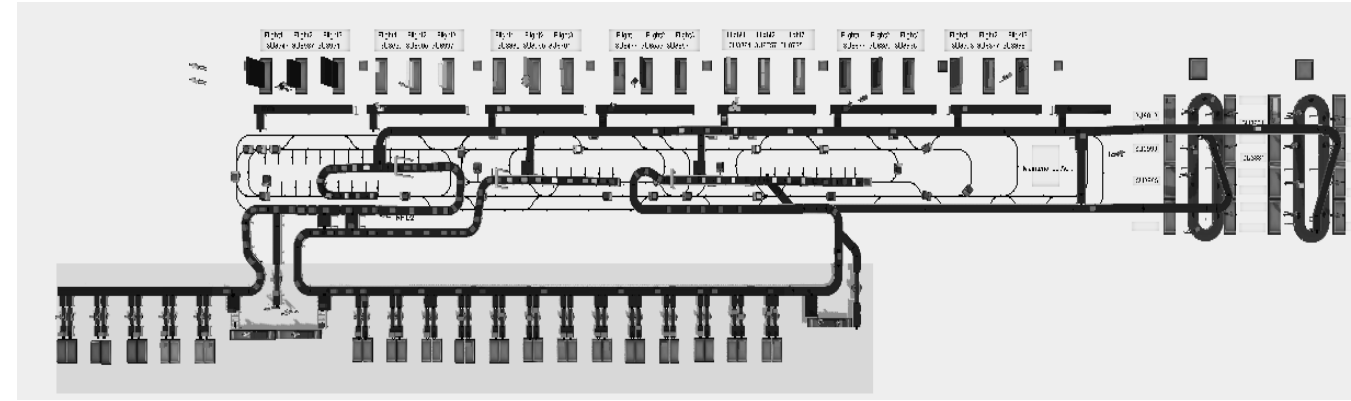
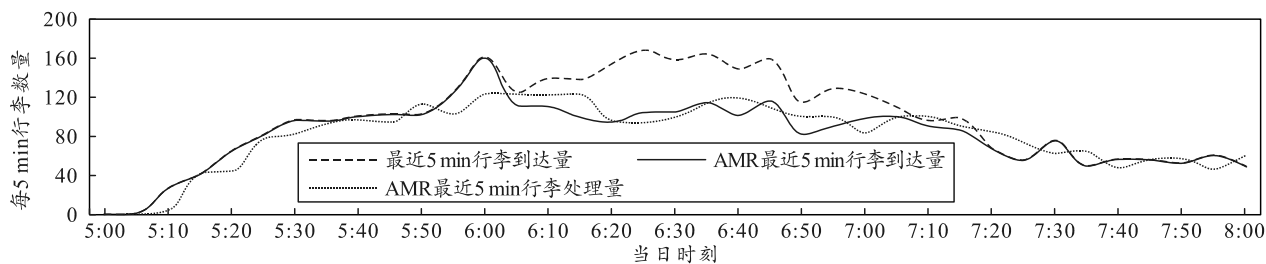


图 8 行李分拣 AMR 系统 FLEXSIM 建模

从图 9 可以得出: 当 AMR 配置数量为 38 套时, 该行李分拣 AMR 系统极限处理能力约为每 5

分钟 130 件, 即 1 560 件/小时, 能够满足本行李分拣 AMR 系统高峰 1 440 件/小时的流量需求。

图9 $m=38$ 时 FLEXSIM 仿真数据

通过上述方法对比可以得出如下结论：笔者提出基于排队论 M/G/s 模型的行李分拣 AMR 系统规划设计方法计算结果可信度优于传统静态解析法；经 FLEXSIM 仿真结果验证具有一定的可信性；相比于 FLEXSIM 仿真建模较为简单，能够采用 Matlab 快速求解。在项目前中期规划设计过程中，快速响应及设计变更频发，该规划设计计算方法能够提供可信有效的设计依据。

5 结论

目前，国内关于第五代 AMR 智能分拣技术的相关技术积累尚处于起步阶段，在规划设计的过程中，AMR 的数量配置是核心关键问题之一。笔者基于统筹学排队论理论，借鉴了国内外 M/G/s 近似扩散算法模型，加入了排队机、充放电效率等关键影响参数，根据机场行李系统的特殊性需求建立了近似求解算法模型。

笔者以某机场实际项目为模型，对其行李分拣 AMR 系统的 AMR 配置数量进行了计算预测。通过与传统静态解析法及 FLEXSIM 仿真方法的结果进行分析对比，所提出的规划设计方法能够较为准确地计算出行李分拣 AMR 系统中所需配置的 AMR 数量，对民航业的技术积累和工程应用具有极大价值。

参考文献：

- [1] 中国民用航空管理局. 2020 年民航行业发展统计公报[R/OL]. [2021-06-10]. www.gov.cn/xinwen/2021-06/11/5617003/files.
- [2] 喻利灵. 机场行李处理系统组成及功能概述[J]. 民航科技, 2011(6): 106-109.
- [3] 朱瑞丹, 韦华南. 车身车间 AGV 物料搬运系统小车数量配置规划探究[J]. 汽车实用技术, 2018, 22: 203-205.
- [4] MULLER T. Automated guided vehicles[J]. Computer

Science, 1983.

- [5] EGBELU P J. The use of non-simulation approaches in estimating vehicle requirements in an automated guided based transport system[J]. Material flow, 1987, 4(1-2): 17-32.
- [6] TANCHOCO J M A, EGBELU P J, TAGHABONI F. Determination of the total number of vehicles in an AGV-based material transport system[J]. Material flow, 1987, 4(1-2): 33-51.
- [7] SRINIVASAN M M, BOZER Y A, CHO M. Trip-based material handling systems: throughput capacity analysis[J]. IIE transactions, 1994, 26(1): 70-89.
- [8] ARIFIN R, EGBELU P J. Determination of vehicle requirements in automated guided vehicle systems: a statistical approach[J]. Production Planning & Control, 2000, 11(3): 258-270.
- [9] VIS I F A, DE KOSTER R, Roodbergen K J, et al. Determination of the number of automated guided vehicles required at a semi-automated container terminal[J]. Journal of the Operational research Society, 2001, 52(4): 409-417.
- [10] TALBOT C. Different Approaches to Optimise Reusable Launch Vehicles Trajectories[C]//54th International Astronautical Congress of the International Astronautical Federation. International Academy of Astronautics, and the International Institute of Space Law, 2003: A.7.04.
- [11] 王冰, 张惠侨. 自动导向车系统的规划设计[J]. 上海交通大学学报, 2001, 35(12): 1793-1797.
- [12] 刘洋, 金亚萍, 向光义, 等. 排队论在 AGV 系统性能指标分析中的应用研究[J]. 物流科技, 2013, 11: 68-70, 81.
- [13] 郭亚亚, 赵宁, 戴琳, 等. 对 M/G/m 排队系统平均等待时间估计方法的数值比较[J]. 江苏科技大学学报(自然科学版), 2017, 31(2): 252-258.
- [14] KIMURA T. Diffusion approximation for an M/G/m queue[J]. Operations Research, 1983, 31(2): 304-321.
- [15] YAO D D. Refining the diffusion approximation for the M/G/m queue[J]. Operations research, 1985, 33(6): 1266-1277.