

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2011.06.005

## 平方根容积卡尔曼滤波算法及其应用

穆静<sup>1,2</sup>, 蔡远利<sup>2</sup>

(1. 西安工业大学 计算机科学与工程学院, 西安 710032; 2. 西安交通大学 电子与信息工程学院, 西安 710049)

**摘要:** 针对使用扩展卡尔曼算法 (extended Kalman filter, EKF) 对复杂非线性状态估计时收敛速度慢、估计精度低的问题, 提出一种平方根容积滤波算法 (square root cubature Kalman filter, SRCKF)。SRCKF 使用基于容积原则的数值积分方法直接计算非线性随机函数的均值和方差。该算法实现时只需计算函数值, 避免了求导运算, 降低了计算复杂度。且该算法传播了状态协方差的平方根, 确保了协方差矩阵的对称性和半正定性, 改进了数值精度和稳定性。把平方根容积卡尔曼滤波算法 (SRCKF) 应用到未知弹道系数的再入弹道目标的状态进行估计中。Monte Carlo 数值仿真表明, 平方根容积滤波算法大大降低了未知弹道系数的再入弹道目标的状态估计误差, 提高估计精度, 且运行速度较快。

**关键词:** 非线性状态估计; 容积原则; 容积卡尔曼滤波; 再入弹道目标

**中图分类号:** TP311.6 **文献标志码:** A

## Square Root Cubature Kalman Filter Algorithm and Application

Mu Jing<sup>1,2</sup>, Cai Yuanli<sup>2</sup>

1. School of Computer Science & Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China;

2. School of Electronic & Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** To solve the slow convergence speed and low estimation accuracy of the extended Kalman filter (EKF) for the complex nonlinear state estimation, the square root cubature Kalman filter (SRCKF) is introduced in the study. In the SRCKF algorithm, the cubature rule based numerical integration method is directly used to calculate the mean and covariance of the nonlinear random function. The algorithm is implemented only using the functional evaluation and is derivative-free so the computational complex is decreased. And the SRCKF propagates the square root of the covariance so that it guarantees the symmetry and positive semi-definiteness of the covariance matrix and improves numerical stability and numerical accuracy. The algorithm is applied to state estimation for reentry ballistic target with unknown ballistic coefficient. The simulation results indicate that the state error in the SRCKF is largely decreased and its estimation accuracy is improved. Moreover, the run speed of SRCKF is faster.

**Keywords:** nonlinear state estimation; cubature rule; cubature Kalman filter; reentry ballistic target

### 0 引言

实际应用中存在着许多非线性滤波问题。解决非线性滤波问题的最优方案需要计算状态的条件后验概率分布, 而精确地描述状态的条件后验概率分布则需求解状态的多维积分。因只有在极少的情况下才能精确描述状态的多维积分, 故人们提出了大量次优的滤波方法。目前, 广泛使用的次优非线性滤波器是扩展卡尔曼滤波器 (extended Kalman filter, EKF)<sup>[1]</sup>, 其基本思想是使用非线性函数的泰勒级数一阶项, 将非线性问题转化为线性问题。对于高度非线性滤波问题, 使用 EKF 算法会引入较大的误差, 在有些情况下, 可能获得发散的状态估计, 且实现 EKF 需要计算状态和测量方程的 Jacobian 矩阵, 但实际上很难求得系统的 Jacobian 矩阵, 甚至有些系统不存在 Jacobian 矩阵。为了提高滤波精度, 提出了一些 EKF 的改进方法, 如二阶

EKF、迭代 EKF 等, 但是以增加计算量为代价的<sup>[2]</sup>。

近来, 提出了多个免微分的状态估计方法。其中, 无迹卡尔曼滤波方法 (unscented Kalman filter, UKF) 通过一组确定的加权采样点来逼近随机变量的分布函数, 通过这组采样点的非线性变换, 捕获随机变量经非线性转换后的统计特性<sup>[3]</sup>。使用 UKF 需要选择合适的参数, 才能达到较好的滤波效果。粒子滤波方法 (particle filter, PF) 依据蒙特卡洛仿真的思想<sup>[4-5]</sup>, 随机产生大量粒子近似计算后验概率密度。PF 实现时需要产生大量的粒子, 计算量非常大, 很难满足实时性的需求, 且有粒子退化和贫化等问题。求积滤波器 (quadrature Kalman filter, QKF), 使用高斯-厄尔米特数值积分获得随机变量非线性变换后的统计特性, QKF 方法使用的积分点数按维数的指数增长, 会引起维数灾难<sup>[6-7]</sup>。

最近提出的容积卡尔曼滤波 (cubature Kalman

收稿日期: 2011-02-22; 修回日期: 2011-03-14

基金项目: 国家自然科学基金 (60972146, 60602025)

作者简介: 穆静 (1979—), 女, 安徽人, 博士, 讲师, 从事状态估计、非线性滤波方法研究。

filter, CKF) [8]使用基于容积原则的数值积分方法计算非线性变换的随机变量后的均值和协方差, CKF 实现简单, 且滤波精度较高。

再入弹道目标的状态估计是目标跟踪中一个的重要方面。由于再入弹道目标受到气动阻力的作用, 使状态和测量方程是高度非线性的, 所以未知弹道系数的再入弹道目标的状态估计问题是个复杂的非线性滤波问题。因此, 笔者运用平方根滤波的数值鲁棒性, 使用基于平方根滤波的平方根容积卡尔曼滤波器 (square root cubature Kalman filter, SRCKF) 对未知弹道系数的再入弹道目标的状态进行估计。

### 1 平方根容积卡尔曼滤波算法

考虑具有加性噪声的离散非线性动态系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (1)$$

$\mathbf{x}_k \in R^{n_x}$  为系统状态向量;  $\mathbf{z}_k$  为量测值。过程噪声  $\mathbf{w}_{k-1}$  和量测噪声  $\mathbf{v}_k$  相互独立, 且  $\mathbf{w}_{k-1} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_{k-1}), \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$ 。

实现平方根容积卡尔曼滤波算法, 首先要计算基本的容积点和对应的权值。使用三阶容积原则获得的基本容积点和对应权值为 [4]:

$$\xi_j = \sqrt{\frac{m}{2}} [1]_j, \quad \omega_j = \frac{1}{m}, j=1, \dots, m \quad (2)$$

$m$  表示容积点总数。使用三阶容积原则, 容积点总数是状态维数的 2 倍, 即:  $m = 2n_x$ 。基本容积点按照下列方式产生的, 记  $n_x$  维单位向量为  $\mathbf{e} = [1, 0, \dots, 0]^T$ , 使用符号 [1] 表示对  $\mathbf{e}$  的元素进行全排列和改变元素符号所产生的点集, 称为完整全对称点集, [1] <sub>$j$</sub>  表示点集中 [1] 的第  $j$  个点。

若  $k-1$  时刻的后验概率为  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{z}_{1:k-1}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, P_{k-1})$ , 获得方差  $P_{k-1}$  的乔列斯基分解因子  $S_{k-1}$ , 即:  $S_{k-1} = \text{Chol}\{P_{k-1}\}$ 。平方根容积卡尔曼滤波算法步骤如下:

1) 时间更新

① 计算容积点

$$X_{j,k-1} = S_{k-1} \xi_j + \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (3)$$

② 计算通过状态方程的传播的容积点

$$X_{j,k}^* = f(X_{j,k-1}) \quad (4)$$

③ 计算状态预测和方差预测的乔列斯基分解

因子

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^m \omega_i X_{i,k}^* \quad (5)$$

$$\bar{S}_k = \text{Tria}([\boldsymbol{\chi}_k^* S_{Q,k-1}])$$

式中  $\text{Tria}()$  表示对矩阵进行三角化, 获得矩阵的方阵。矩阵  $\boldsymbol{\chi}_k^*$  定义为:

$$\boldsymbol{\chi}_k^* = \frac{1}{\sqrt{m}} [X_{1,k}^* - \bar{\mathbf{x}}_k \quad X_{2,k}^* - \bar{\mathbf{x}}_k, \dots, X_{m,k}^* - \bar{\mathbf{x}}_k] \quad (6)$$

2) 测量更新

① 计算容积点

$$X_{j,k} = \bar{S}_k \xi_j + \bar{\mathbf{x}}_k \quad (7)$$

② 计算通过量测方程的传播的容积点

$$Z_{j,k} = h(X_{j,k}) \quad (8)$$

③ 计算测量预测、新息方差的乔列斯基分解因子和协方差

$$\bar{\mathbf{z}}_k = \sum_{i=1}^m \omega_i Z_{i,k} \quad (9)$$

$$S_{zz,k} = \text{Tria}([\mathbf{r}_k \quad S_{R,k}]) \quad (10)$$

$$P_{xz,k|k-1} = \boldsymbol{\chi}_k \mathbf{r}_k^T$$

其中, 矩阵  $\mathbf{r}_k, \boldsymbol{\chi}_k$  定义为:

$$\mathbf{r}_k = \frac{1}{\sqrt{m}} [Z_{1,k} - \bar{\mathbf{z}}_k \quad Z_{2,k} - \bar{\mathbf{z}}_k, \dots, Z_{m,k} - \bar{\mathbf{z}}_k] \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\chi}_k = \frac{1}{\sqrt{m}} [X_{1,k} - \bar{\mathbf{x}}_k \quad X_{2,k} - \bar{\mathbf{x}}_k, \dots, X_{m,k} - \bar{\mathbf{x}}_k]$$

④ 计算增益,  $k$  时刻的状态和方差的乔列斯基分解因子估计为:

$$W_k = (P_{xz,k} / S_{zz,k}^T) / S_{zz,k} \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + W_k (\mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_k) \quad (13)$$

$$S_k = \text{Tria}[\boldsymbol{\chi}_k - W_k \mathbf{r}_k \quad W_k S_{R,k}]$$

式中, 符号 / 为矩阵的右除运算符。

### 2 再入弹道目标状态估计中的应用

使用 SRCKF 算法对未知弹道系数的再入状态进行估计, 并把 SRCKF 算法与 EKF 和 UKF 算法进行性能比较。

#### 2.1 状态方程和测量方程

假设地球为平面, 且假定目标在再入段时只受到地球引力和空气阻力 [9], 可建立如下的再入弹道目标的离散非线性状态方程。

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (14)$$

式中, 状态向量  $\mathbf{x}_k$  定义为  $\mathbf{x}_k = [x_k \ \dot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \beta_k]^T$ 。  $w_k$  为过程噪声, 假定其服从均值为零的高斯白噪声, 即:  $w_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k)$ , 其协方差矩阵建模为<sup>[11]</sup>:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} q_1\theta & 0 & 0 \\ 0 & q_1\theta & 0 \\ 0 & 0 & q_2T \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix} \quad (15)$$

$T$  为连续 2 个雷达测量间隔时间,  $q_1, q_2$  是过程噪声强度参数。

式 (14) 中表达式  $f(\mathbf{x}_{k-1})$  为:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G} \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{G} \mathbf{f}_g \quad (16)$$

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{g}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \quad (17)$$

式 (16) 中表达式

$$\mathbf{f}_d(\mathbf{x}_{k-1}) = -0.5 \frac{g}{\beta_{k-1}} \rho(y_{k-1}) \sqrt{\dot{x}_{k-1}^2 + \dot{y}_{k-1}^2} [\dot{x}_{k-1} \ \dot{y}_{k-1}]^T$$

为气动阻力对再入目标所产生的阻力加速度,  $\mathbf{f}_g = [0 \ -g]^T$  为地球引力产生的加速度。  $\rho$  为空气密度, 当高度小于 90 km, 空气密度可建模为随目标高度下降按指数衰减的函数<sup>[10]</sup>, 即  $\rho(y) = c_1 e^{-c_2 y}$ , 其中  $c_1, c_2$  为常数。

假定雷达位于考虑的笛卡尔坐标原点, 其测量弹道目标的距离和俯仰角。根据几何关系, 可建立量测方程为:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (18)$$

式中  $\mathbf{z}_k = [r_k \ \varepsilon_k]^T$  是测量值, 距离  $r_k$  和俯仰角  $\varepsilon_k$  与再入目标状态的关系为:

$$r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} + v_r \quad (19)$$

$$\varepsilon_k = a \tan y_k / x_k + v_\varepsilon$$

测量噪声  $\mathbf{v}_k = [v_r \ v_\varepsilon]^T$  为均值为零的高斯白噪声, 即  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$ , 其协方差矩阵:

$$\mathbf{R}_k = \text{diag}[\sigma_r^2 \ \sigma_\varepsilon^2] \quad (20)$$

式中  $\sigma_r, \sigma_\varepsilon$  为距离和俯仰角的量测误差标准差。

状态噪声、测量噪声和初始状态相互对立。

## 2.2 仿真和分析

仿真中使用的参数为:  $T=0.1\text{ s}$ , 雷达测量的距离和俯仰角的标准偏差选取为  $\sigma_r=100\text{ m}$  和  $\sigma_\varepsilon=0.017$ 。目标弹道系数选取为  $\beta=40\ 000\text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s}^2)$ 。目标的初始位置和速度选取为  $x_0=232\text{ km}$ ,  $y_0=60\text{ km}$  和  $v_0=3\ 000\text{ m/s}$ , 目标的再入角  $\gamma_0=210^\circ$ , 初始状态的方差选取为  $\mathbf{P}_0 = \text{diag}([500^2, 50^2, 500^2, 50^2, 10\ 000^2])$ , 仿真中跟踪目标 60 s, 蒙特卡罗仿真次数为 100 次。

将平方根容积卡尔曼滤波算法 (SRCKF) 与 EKF, UKF 算法进行比较。图 1、图 2 和图 3 表示了 3 种滤波算法的位置、速度和弹道系数的均方根误差曲线。表 1 为 3 种滤波算法的平均运行时间。

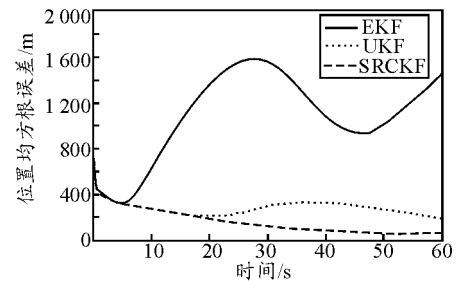


图 1 3 种滤波算法的位置均方根误差

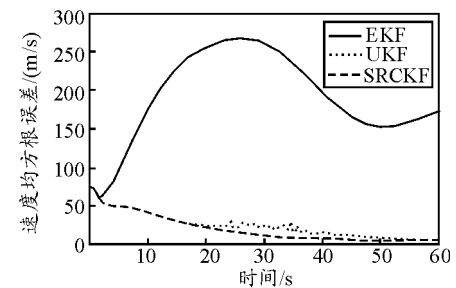


图 2 3 种滤波算法的速度均方根误差

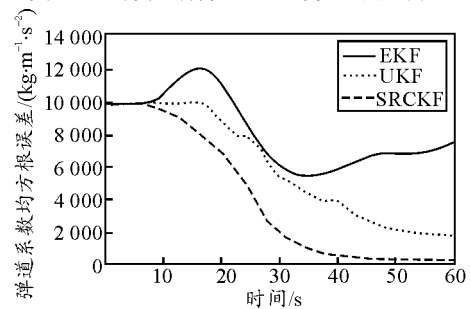


图 3 3 种算法的弹道系数均方根误差

表 1 3 种算法的平均运行时间

滤波算法	平均运行时间 $t/s$
EKF	0.056 602
UKF	1.264 500
SRCKF	0.437 880