

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2011.10.009

病态理论在捷联惯性导航粗对准中的应用

袁涛^{1,2}, 李四海¹, 徐景硕², 殷磊²

(1. 西北工业大学自动化学院, 西安 710072; 2. 海军航空工程学院青岛分院, 山东 青岛 266041)

摘要: 针对捷联惯性导航系统粗对准算法中存在共线性的问题, 通过分析基于重力矢量信息的双矢量定姿对准算法中系数矩阵的病态性。利用病态矩阵理论中条件数方法对该问题进行分析研究, 确定对准时间对共线性问题的影响, 并以实例进行仿真计算。仿真结果表明, 1 min 后共线性问题可以忽略, 可解决传统解析粗对准中的角运动干扰问题。

关键词: 捷联惯性导航系统; 粗对准; 双矢量定姿; 病态矩阵; 条件数
中图分类号: TJ05 **文献标志码:** A

Application of Ill-Conditioned Matrix Theory in Coarse Alignment of Strapdown Inertial Navigation System

Yuan Tao^{1,2}, Li Sihai¹, Xu Jingshuo², Yin Lei²

(1. Dept. of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. Qingdao Branch, Naval Aeronautical Engineering Academy, Qingdao 266041, China)

Abstract: Aimed at coarse alignment of Strapdown Inertial Navigation System (SINS), the theory of reference vectors based on gravity vector has a problem of collinearity because the alignment time is transitory and the angle of gravity vectors turning in inertial space is little. The condition of ill-conditioned matrix theory was used to study the problem, the effect of alignment time on collinearity was confirmed. The simulation results show that the problem can be ignored after 1 minute, and the coarse alignment can be finished.

Keywords: strapdown inertial navigation system(SINS); coarse alignment; reference vector; ill-conditioned matrix; condition

0 引言

捷联惯性导航系统在进入导航工作状态之前必须进行初始对准, 而初始自对准一般分为粗对准和精对准 2 个过程。其中粗对准的目的是给精对准提供一个比较准确的姿态初始值, 以便缩短精对准时间。目前在粗对准算法中^[1], 近年来基于重力矢量信息的解析粗对准算法研究比较多^[2-3]。但是由于粗对准时间比较短暂, 重力矢量在惯性空间转动的角度比较小, 存在矢量复共线问题, 从而导致解算时出现病态矩阵^[4-5], 因此有必要分析其病态性, 确定其对对准精度的影响。笔者通过分析基于重力矢量信息的双矢量定姿对准算法中系数矩阵的病态性, 并通过仿真计算确定其有效性的条件。

1 双位置解析粗对准

粗对准可定义为: 惯性导航系统开始工作后, 确定 t 时刻载体粗略估计姿态的过程。对捷联惯性导航系统来说就是粗略计算姿态矩阵 C_b^n (b 为载体坐标系, n 为导航坐标系) 的过程。为了确定姿态矩阵 C_b^n , 可以通过 2 个不相互平行矢量(参考矢量)确定 t 时刻的姿态矩阵, 即双矢量定姿法。

传统的粗对准方法利用重力矢量 g 和地球自转角速度矢量 ω_{ie} 2 个信息, 如果能在对准过程中得到 g 和 ω_{ie} 在导航坐标系上的投影, 则利用下式

$$C_b^n = [g^b \ \omega_{ie}^b \ g^b \times \omega_{ie}^b] [g^n \ \omega_{ie}^n \ g^n \times \omega_{ie}^n]^{-1} \quad (1)$$

即可得到粗略姿态矩阵 C_b^n , 完成粗对准。

同样如当选择 t_1 和 t_2 2 个时刻的重力矢量和 g_{t_2} 作为参考矢量时, 如能得到 $g_{t_1}^n$ 、 $g_{t_2}^n$ 、 $g_{t_1}^b$ 和 $g_{t_2}^b$ (g^n 和 g^b 为重力矢量在导航坐标系和机体坐标系中的投影), 根据式 (1) 双矢量定姿原理得:

$$C_b^n = [g_{t_1}^b \ g_{t_2}^b \ g_{t_1}^b \times g_{t_2}^b] [g_{t_1}^n \ g_{t_2}^n \ g_{t_1}^n \times g_{t_2}^n]^{-1} \quad (2)$$

即完成了粗对准, 如图 1。该方法即为基于重力矢量的双位置解析粗对准方法。

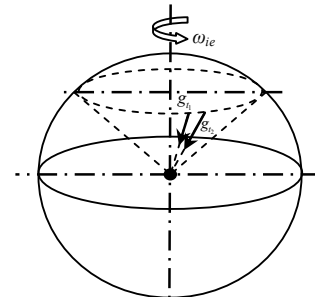


图 1 重力矢量在惯性空间的转动

收稿日期: 2011-06-10; 修回日期: 2011-07-08

作者简介: 袁涛(1976—), 男, 山东人, 硕士研究生, 讲师, 从事惯导技术、精密仪器及机械研究。

2 病态矩阵的分析

基于重力矢量的双位置粗对准方法，由于粗对准时间比较短暂，不允许长时间，因此重力矢量在惯性空间转动的角度比较小，存在一定的共线性。如矢量 $L_1(1\ 0\ 0)$ 与矢量 $L_2(0.999\ 0\ 0.001)$ 就有很强的共线性，近似于重合。如果两矢量重合，则基于双矢量的定姿方法由于失去一个矢量，也将无法确定 $L_1 \times L_2$ ，最终将无法完成姿态矩阵的求解。关于共线性的诊断、共线性严重程度的度量以及共线性对方程组求解的影响程度的研究，到目前为止，人们已经提出了十余种诊断技术^[6]，目前最为常用的一种度量方法是条件数法。

设待解方程组可用如下形式表示：

$$AX = b \quad (3)$$

其中系数矩阵 A 和观测向量 b 在实际中通常都是通过观测或计算等方式获得，往往并不能够获得其精确值，因此实际用于求解 X 的方程组为 $(A + \delta A)X = (b + \delta b)$ ，其中， δA 、 δb 是由于测量等原因而产生的扰动矩阵和扰动向量，实际计算中只能获得 X 的近似解。设求解误差为 δX ，则有：

$$(A + \delta A)(X + \delta X) = (b + \delta b) \quad (4)$$

对式 (4) 展开并利用式 (3) 得：

$$A\delta X + (\delta A)X + (\delta A)\delta X = \delta b \quad (5)$$

即：

$$\delta X = -A^{-1}(\delta A)X - A^{-1}(\delta A)\delta X + A^{-1}\delta b \quad (6)$$

根据矩阵范数与向量范数的相容性定义，对上式的两端取欧式范数，于是有：

$$\|\delta X\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|X\| + \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|\delta X\| + \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\| \quad (7)$$

整理得：

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|A\| \cdot \|X\|} \right) \quad (8)$$

又由于 $\|b\| = \|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$ ，带入上式可得：

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) \quad (9)$$

定义矩阵 A 的条件数为： $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ ，则有

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) \quad (10)$$

应用中的实践经验表明：若条件数 $\kappa(A) < 100$ ，则认为没有共线性；若 $100 < \kappa(A) < 1000$ ，则认为存在中等程度或较强的共线性；若条件数 $\kappa(A) > 1000$ ，则认为存在严重的共线性，线性方程组存在病态性。如有矩阵 $B = [L_1^T \ L_2^T]^T$ ，则其条件数为 $\text{cond}(B) = 1998$ ，这说明组成矩阵 B 的 2 个矢量 L_1 、 L_2 具有很强的共线性，近似于重合。

特别地，当 $\delta A = 0$ 时，式 (10) 简化为 $(\|\delta X\|/\|X\|) \leq \kappa(A)(\|\delta b\|/\|b\|)$ ，可以看出，当 $\delta A = 0$ 时， $\kappa(A)$ 反映了方程组的解 X 的相对误差对于 b 的相对误差的放大程度。如果 $\kappa(A)$ 较小，则较小的 $\|\delta b\|/\|b\|$ 可以判定 $\|\delta X\|/\|X\|$ 也比较小，即方程组对 b 的扰动不太敏感，则称矩阵 A 是良好的。如果 $\kappa(A)$ 很大，则较小的 $\|\delta b\|/\|b\|$ 不能保证有较小的 $\|\delta X\|/\|X\|$ ，所以存在 b 和 δb 使得 $\|\delta X\|/\|X\|$ 比 $\|\delta b\|/\|b\|$ 大很多，也就是方程组对 b 的扰动非常敏感，换句话说即使 b 的扰动很小，也能引起 X 的很大偏差。因此可以用条件数来度量共线性的大小及诊断线性方程组的病态性。

3 粗对准中条件数的变化规律

对于基于重力矢量的双位置粗对准方法，姿态矩阵式 (2) 可以整理为：

$$\begin{bmatrix} g_1^b & g_2^b & g_3^b \times g_2^b \end{bmatrix} C_b^n = \begin{bmatrix} g_1^n & g_2^n & g_3^n \times g_2^n \end{bmatrix} \quad (11)$$

可以简记为：

$$G^b [C_1 \ C_2 \ C_3] = [G_1^n \ G_2^n \ G_3^n] \quad (12)$$

其中 C_i 和 G_i^n ($i = 1, 2, 3$) 为列向量。

则姿态矩阵 C_b^n 的计算过程等价于求解如下 3 个线性方程组，即式 (12) 可以表示为：

$$\begin{cases} G^b C_1 = G_1^n \\ G^b C_2 = G_2^n \\ G^b C_3 = G_3^n \end{cases} \quad (13)$$

这 3 个线性方程组具有相同的系数矩阵，即其系数矩阵的条件数相同，为 $\kappa(G^b)$ 。

由于载体所处纬度的不同，将会导致所在地点的重力矢量在同等时间间隔条件下在惯性坐标系内的转动造成不同的影响，因此需要考虑载体的纬度影响。对不同的粗对准时间(并考虑纬度影响)就其系数矩阵的条件数 $\kappa(G^b)$ 的变化规律仿真，如图 2。

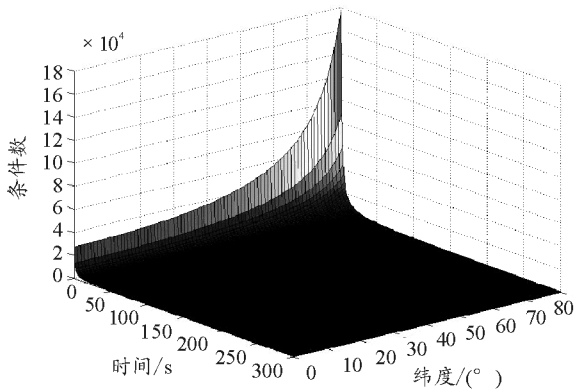


图 2 对准时间和纬度对条件数的影响

由图 2 可知, $\kappa(\mathbf{G}^b)$ 矩阵的条件数与对准时间以及载体所在地的纬度都有关系, 对准时间短和纬度高都会导致 \mathbf{G}^b 矩阵的条件数过大, 进而影响到姿态矩阵的求解精度。

4 结论

如果利用传统的解析粗对准(即利用重力矢量 \mathbf{g} 和地球自转角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$), 虽然两者只有在极区附近的共线性比较显著, 但是方程的求解精度不仅与系数矩阵的条件数有关, 还会受到测量噪声与观察值的比值的影响 ($\delta A \neq 0$), 由于地球自转角速度非常小, 干扰量级通常都远远大于地球自转角速度, 因此如果在对准过程中存在角运动干扰, 对准

(上接第 9 页)

图 4 中, 电化厂某车间液氯泄漏, 其扩散范围为一个气团, 并向东南风不断漂移, 随着扩散时间的增大, 影响范围的变化趋势是: 轻度危害范围和中度危害范围先增大, 后减小, 直到消失。中毒危害范围先于轻度危害范围减小、消失。系统可以根据提供泄漏物质、泄漏时间、泄漏距离计算及危害浓度等相关属性信息, 动态模拟泄漏事故情况, 图中区域 3 表示中毒危害区域的致死区, 区域 4 表示重伤区、区域 2 表示轻伤区^[4]。

4 结束语

笔者以 GIS 系统提供的基本功能为依托, 综合利用数据库、模型库等资源优势和分析方法, 能以

精度就会受到很大的影响, 甚至不能完成对准。

基于重力矢量的双位置对准中, 虽然系数矩阵的条件数在对准时间很短或高纬度时比较巨大, 在误差的影响下会造成很大的解算偏差, 但是在中低纬度、较短时间 (1 min) 之后并随着对准时间的增长, 系数矩阵的条件数就会急剧下降到 100 以下, 病态影响降低很多。此时基于重力矢量的双位置对准, 可解决传统解析粗对准中的角运动干扰的问题, 具有较强的理论应用前景, 并为粗对准提供了一种新的思路和方法。

参考文献:

- [1] 杨亚非. 惯导系统初始对准技术综述[J]. 中国惯性技术学报, 2002, 10(2): 68-72.
- [2] 秦永元. 摇摆基座上基于信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报, 2005, 3(5): 681-685.
- [3] 赵长山. 基于双矢量定姿的摇摆基座粗对准算法分析与实验[J]. 中国惯性技术学报, 2009, 17(4): 436-440.
- [4] 项凤涛, 王正志, 吴第, 等. 捷联系统四元数姿态解算的精积分法[J]. 四川兵工学报, 2010, 31(5): 109.
- [5] 白亮. 弹载及车载捷联惯导对准技术研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2010: 31-37.
- [6] 郭建峰. 测量平差系统病态性的诊断与处理[D]. 郑州: 中国人民解放军信息工程大学, 2002: 7-13.
- [7] 冯遵德. II 类病态系统分析理论及其应用研究[D]. 青岛: 山东科技大学, 2006: 15-20.

直观、形象的形式辅助决策者及时了解掌握事故发展动态, 进行应急救援工作的指挥决策。

参考文献:

- [1] 张斌, 黄全义, 张松波. GIS 在城市应急救援中的应用[J]. 地理空间信息, 2007, 5(1): 105-107.
- [2] 陈海群, 王凯全, 等. 危险化学品事故处理与应急预案[M]. 中国石化出版社, 2006: 31-36.
- [3] 刘茂, 吴宗之. 应急救援概论—应急救援系统及计划[M]. 化学工业出版社, 2004: 5-9.
- [4] 王典, 何国良, 毕明光. 应急作战装备的库存控制[J]. 四川兵工学报, 2010, 31(9): 40.
- [5] 冯春莹, 徐志胜, 徐亮. 城市火灾模拟分析与消防应急指挥系统的设计与实现[J]. 防灾减灾工程学报, 2005, 2(25): 189-194.