

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2011.12.002

空-空导弹 μ 综合控制降阶与算法

臧月进, 陈欣, 张民

(南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

摘要: 针对新型空-空导弹中 μ 综合方法设计的控制器受到弹载处理器的计算能力等约束, 呈现高阶、刚性、病态坏条件等问题, 提出了一种收敛性更强的“隐式欧拉加外推”算法。通过对比平衡截断法和 Hankel 范数逼近法对控制器进行降阶优化处理, 对比降阶效果进行偏差估计, 分析降阶前后与降阶方法差异导致的闭环系统鲁棒性, 证明 Hankel 范数逼近方法在降阶效果和性能保持能力方面更佳。并根据刚性特征, 提出了一种“隐式欧拉加外推”算法。仿真分析和测试数据表明: 该算法相对其他 ODE 差分格式有显著的收敛性, 单步运算速度仅 2 ms, 满足实时性要求。

关键词: 空-空导弹; 降阶; μ 综合; 平衡截断; Hankel 范数逼近; 隐式欧拉加外推; 刚性

中图分类号: TJ765 **文献标志码:** A

Order Reduction and Arithmetic of Air-to-Air Missile μ -Synthesis Controller

Zang Yuejin, Chen Xin, Zhang Min

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Controllers designed by μ -synthesis for the next generation air-to-air missile are constraint by the ability of the current CPU. So that these controllers have many problems, i.e. high order stiff and moreover bad condition, a new arithmetic called ‘Implicit Euler and Extrapolate’ is put forward. Through comparison of declination bound estimation and close-loop robustness after reduction are analyzed between these two reduction means, which validates that Hankel norm approximation performs better reduction effect as well as better performance holding. Due to stiff feature, a new arithmetic called ‘Implicit Euler and Extrapolate’ for implementing the μ -synthesis controller is introduced which also show better astringency than other arithmetic. At the same time, the running rate reach 2ms per step only, satisfying the real-time requirement.

Keywords: air-to-air missile; order reduction; μ -synthesis; balanced truncation; Hankel norm approximation; implicit euler and extrapolate; stiff

0 引言

为了满足高机动性的要求, 第四代空-空导弹常采用大攻角飞行策略, 由于通道间交叉耦合、惯性耦合和气动力非线性的缘故, 空-空导弹的运动表现出强非线性和变参数特性^[1-4], 传统的经典控制方法很难满足设计要求。当今国外第四代空空导弹自动驾驶仪设计大多采用了基于现代控制理论的鲁棒控制设计方法进行控制器设计并获得成功^[2]。在鲁棒控制理论工程化应用中, H_∞ 与 μ 综合居多且可用于设计高度复杂不确定系统的鲁棒性能控制器^[5], 由于 μ 综合能同时对鲁棒稳定性与鲁棒性能进行分析, 并有效降低保守性^[5], 该方法受到越来越多的关注^[6-7], 并在国外的某些四代型号上得到了成功应用, 如欧洲的 IRIS-T 空空导弹^[2]。然而, 由于空-空导弹是高阶动力学系统, 应用 μ 方法设计的控制器阶次是模型的几倍甚至是十几倍。这时弹载处理

器的计算速度和有限精度算法无法满足其需求^[8], 显然低阶控制器在计算量与工程实现方面较高阶控制器具有显著优势。另一方面由于这类控制器往往呈现刚性、病态坏条件特性^[9-11], 进一步制约了弹载计算机中一系列基于一般显式差分格式的算法实现。

因此, 笔者针对某样例空-空导弹纵向通道所设计 μ 综合控制器进行降阶研究、方法选择对比和鲁棒性分析; 同时针对 μ 控制器刚性特征提出一种收敛性更强的新型算法, 以有效地解决上述问题。

1 降阶方法概述

1.1 平衡截断

设 $[A, B, C, D]$ 为稳定系统 G 的平衡实现, 即它的可控性和可观性 Gram 矩阵相等且为对角阵, 记此平衡 Gram 矩阵为 Σ , 则 $A\Sigma + \Sigma A^* + BB^* = 0$,

收稿日期: 2011-08-25; 修回日期: 2011-09-30

基金项目: 飞行器自主控制技术教育部工程研究中心(南京航空航天大学)资助

作者简介: 臧月进(1987—), 男, 江苏人, 硕士研究生, 从事导弹鲁棒飞行控制研究。

$A^* \Sigma + \Sigma A + C^* C = 0$ 。现将此平衡矩阵分块为 $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$ ，相应地将系统分块为

$$G = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 \ C_2], D \text{ 其中}$$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_r I_{s_r})$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_N I_{s_N})$$

及 $\sigma_1 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \dots > \sigma_N$ 。这里， σ_i 的重数为 s_i ， $i=1, 2, \dots, N$ ， $s_1 + s_2 + \dots + s_N = n$ ，则经截断的系统 $G_r = [A_{11}, B_1, C_1, D]$ 是平衡的和渐进稳定的，进而有 $\sigma_{r+1} \leq \|G - G_r\|_\infty \leq 2 \sum_{r+1}^n \sigma_i^{[12]}$ 。

1.2 Hankel 范数逼近

最优 Hankel 范数逼近表述为^[5]：给定具有 McMillan 阶的传递函数 $G(s)$ ，求 McMillan 阶 $r < n$ 的传递函数 $G_r(s)$ ，使 $\|G - G_r\|_H$ (Hankel 范数) 最小。定义 $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \dots > \sigma_n$ 为 $G(s)$ 的 Hankel 奇异值，一个方的稳定传递函数矩阵 $G(s)$ 可表为 $G(s) = D_0 + \sigma_1 E_1(s) + \dots + \sigma_n E_n(s)$ ，这里 $E_k(s)$ ($k=1, 2, \dots, n$) 均为全通矩阵。记 $G_r(s) = D_0 + \sigma_1 E_1(s) + \dots + \sigma_r E_r(s)$ ，显然其具有 McMillan 阶 r ，且 $\|G - G_r\|_H$ 达到了最小，且有 $\sigma_{r+1} \leq \|G - G_r\|_H \leq \sum_{r+1}^n \sigma_i^{[12]}$ 。

2 控制器设计

2.1 弹体纵向模型

对某样例空空导弹非线性模型配平线性化得到在 5 km 高度、20° 攻角、2 Ma 速度下的纵向小扰动线性化模型，其状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1911 & 0.0340 & -216.2655 & 9.7907 \\ 0.8039 & -5.8131 & 624.2655 & -0.0000 \\ -0.0390 & -0.2643 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0002 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -7.1450 \\ -1.1882 \\ 0 \end{bmatrix} \times \delta_e$$

输出方程：

$$\begin{bmatrix} Az \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8039 & -5.8131 & 0 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 57.2958 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7.1450 \\ 0 \end{bmatrix} \times \delta_e$$

其中 u 、 w 分别为纵向和法向速度； α 为攻角； Az 为纵向过载； q 、 θ 分别为俯仰角和俯仰角速率； δ_e 为升降舵偏角。

2.2 控制器设计

以 Az 、 q 作控制变量，控制设计结构如图 1。

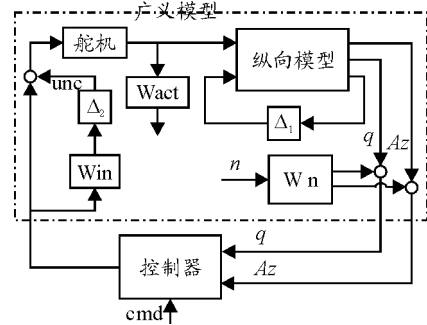


图 1 纵向控制器设计结构

虚线框内为包括各类加权函数的广义模型，其中 Win 为未建模动态加权函数，Wact 为舵机加权函数，Wn 为噪声加权函数，这里均直接采用文献[13]所有的加权函数， Δ_1 为未建模动态不确定性 $\|\Delta_1\| \leq 1$ ， Δ_2 为参数不确定性；虚线框外即为需要设计的控制器。

利用 Matlab 平台的 μ -toolbox 进行 D-K 迭代^[11]运算，经过三轮迭代过程不断对 D、K 中参数轮流计算，得到最大结构奇异值 μ 为 1.7313，此时能够获得符合要求的 31 阶纵向控制器：

$$\begin{cases} \dot{x}_k = Ax_k + Bu \\ y = Cx_k \end{cases} \quad (1)$$

x_k 为控制器状态， $u = [\text{cmd} \ A_z \ q]^T$ 为控制输入，cmd 为过载指令， y 为控制器输出升降舵偏角。

3 控制器降阶与偏差估计

分别采用 1.1 节的平衡截断法与 1.2 节 Hankel 范数逼近法对 2.2 节设计的 31 阶控制器进行降阶，同时对比降阶的闭环系统结构奇异值及偏差。比较结果列在表 1 中，图 2~图 4 为 8~10 阶降阶控制器的闭环过载响应，图 5 为降阶前后 9 阶控制器对应的闭环结构奇异值上下界。

表 1 平衡截断与 Hankel 范数逼近降阶对比

平衡截断		Hankel 范数逼近		
r	μ	$\ G - G_r\ _\infty$	μ	$\ G - G_r\ _\infty$
9	1.5759	0.054209	1.5688	0.044741
10	1.4920	0.058162	1.6442	0.033769
11	1.7398	0.049502	1.6059	0.025077
12	1.8372	0.039746	1.7452	0.021802

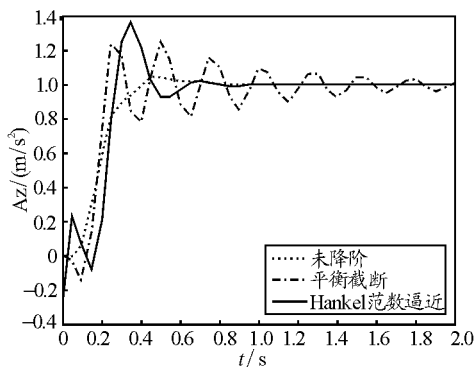


图 2 8 阶控制器单位过载响应对比

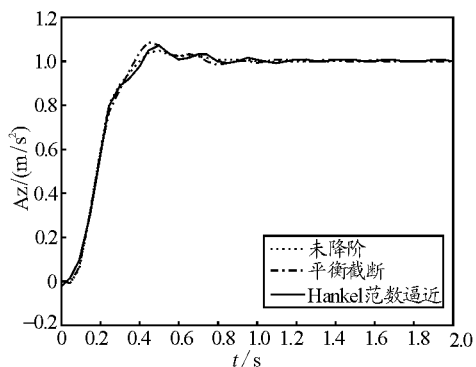


图 3 9 阶控制器单位过载响应对比

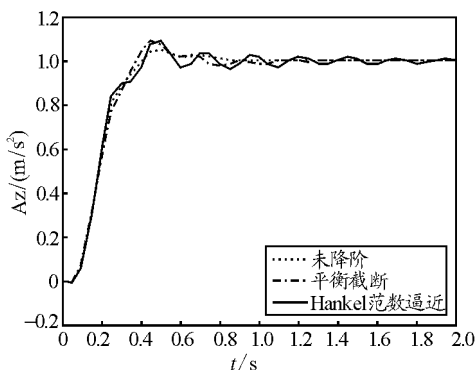


图 4 10 阶控制器单位过载响应对比

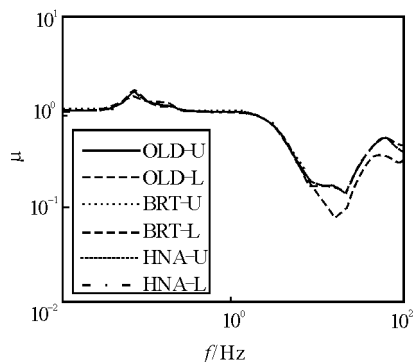


图 5 闭环系统结构奇异值上下界 (9 阶)

如图 2~图 4 所示, 当控制器阶次降低到 9 阶时, 过载响应在控制器依然保持性能; 从表 1 可见当采用 Hankel 范数逼近降阶方法时, 闭环系统的结

构奇异值几乎在所有的阶次上均小于采用平衡截断后的闭环系统结构奇异值, 在图 5 中也是如此。

从表 1 中第 3 列和第 5 列可见, 采用 Hankel 范数逼近方法进行控制器降阶的损失低于采用平衡截断方法的降阶损失。第 1 节中的平衡截断的偏差上界为 Hankel 范数逼近偏差上界的 2 倍, 也说明了这点。

综上所述, 应用 Hankel 范数逼近在闭环系统鲁棒性保持方面更优于采用平衡截断方法, 并且误差更低。

4 控制器算法设计与验证

分析 2.2 节设计的控制器, 其特征值的最大模为 $\lambda_1=2.305 \times 10^5$, 而特征值最小模为 $\lambda_2=7.373 \times 10^{-4}$, 刚性比定义为 $rat = \lambda_1/\lambda_2 = 3.127 \times 10^8$, 说明该控制器刚性特征显著; 同时该控制器的最大奇异值为 $\bar{\sigma}=5.160 \times 10^5$, 而最小奇异值为 $\underline{\sigma}=1.638 \times 10^{-5}$, 条件数定义为 $cond = \bar{\sigma}/\underline{\sigma} = 3.149 \times 10^{10}$, 控制器呈现病态特征。

针对 μ 综合控制器的刚性特征, 常规微分方程差分格式对于步长的选择要求非常严格, 笔者考虑采用微分隐式格式。

对微分方程一般形式 $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, 采用欧拉隐式形式展开:

$$x_{n+1} = x_n + h \times f(t_{n+1}, x_{n+1}), \text{ 这里 } h \text{ 为基准步长}$$

对 $f(t_{n+1}, x_{n+1})$ 一次牛顿迭代:

$$f(t_{n+1}, x_{n+1}) = f(t_n, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_n} \times (x_{n+1} - x_n) \quad (2)$$

从而:

$$x_{n+1} = x_n + h \times [f(t_n, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_n} \times (x_{n+1} - x_n)] \quad (3)$$

分离 x_n 、 x_{n+1} 至等式两边, 有

$$x_{n+1} = x_n + h \times [I - h \frac{\partial f}{\partial x}]^{-1} \times f(t_n, x_n) \quad (4)$$

对于这里的线性控制器 (1), 有 $\frac{\partial f}{\partial x} = A$, 故

$$x_{n+1} = x_n + h \times [I - h \times A]^{-1} \times f(t_n, x_n) \quad (5)$$

式 (5) 即微分方程的带一次牛顿迭代的隐式欧拉形式。

考虑到控制器的病态特征, 同时为了提高收敛速度, 对式 (5) 每次结果进行修正, 引入外推:

将基准步长 h 分割, 选择序列 $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ 由 $h = n_j h_j$, 则 $h_1 > h_2 > h_3 > \dots$

选择

$$\begin{cases} T_{j1} = x_{h_j}(h) \\ T_{j,k+1} = T_{j,k} + (T_{j,k} - T_{j,k-1}) / (n_j / n_{j-1} - 1) \end{cases} \quad (6)$$

根据经验原则, 取 $n_j = 2n_{j-2}$, 这里取为 {4,6,8,12}, 式 (6) 即为 Richardson 多项式外推,

针对 3 节中的 9 阶控制器, 为提高计算机解算效率, 仅取一次外推 {4}。

因此, 式 (5) 和式 (6) 即针对控制器实现设计的欧拉隐式加外推格式。

表 2 列出阿达姆算法、欧拉算法、4 阶龙格库塔以及笔者提出的带外推格式的隐式欧拉在某 32 位嵌入式系统中的单步性能对比。

表 2 不同算法性能对比

算法	容忍步长/s	耗时/ms
阿达姆	发散	—
欧拉	0.000 001	0.07
4 阶龙格库塔	0.000 001	0.025
带外推的	0.005	2.06
隐式欧拉	0.01	2.03

由表 2 可知, 对于 9 阶控制器, 当选择步长为 0.005 s 时, 采用带外推的隐式欧拉算法计算耗时 2.06 ms, 满足实时性要求; 而同类基于显式格式阿达姆算法甚至无法保证收敛, 欧拉与 4 阶龙格库塔只有当步长选择到 0.000 001 s 时算法才会收敛, 但实际中传感器根本无法实现这种程度的采样周期, 而笔者提出的算法对于步长的选择相对宽泛, 且实时性强, 因此该算法更适合工程应用。

5 结论

笔者采用平衡截断法和 Hankel 范数逼近法对某样例空空导弹纵向控制器的降阶进行比对, 通过实验发现, 在降低相同阶次的情况下, Hankel 范数逼近法在偏差界、闭环性能保持方面均优于平衡截断法。由此可以证明: 针对 μ 综合控制器刚性特征

设计的加入外推修正的新型隐式欧拉算法, 在收敛性与实时性方面优于其他 ODE 算法, 更适用于空空导弹鲁棒驾驶仪的实现。

参考文献:

- [1] Raimund DolcT, Harald Buschek. Flight test of a scheduled μ -Synthesis Autopilot for an Air-to-Air Missile[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit 6-9 August 2001 Montreal, Canada.
- [2] Harald Buschek. Design and Flight Test of a Robust Autopilot for the IRIS-T Air-to-air Missile[J]. Control Engineering Practice 11 2003: 551-558.
- [3] Harald Buschek. Full Envelope Missile Autopilot Design Using Gain Scheduled Robust Control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, January-February 1999, 22(1): 115-122.
- [4] Harald Buschek. Robust Autopilot Design for Future Missile Systems[J]. AIAA-97-3763.
- [5] Zhou Kemin, Doyle J C, Glover K. Robust and Optimal Control[M]. Prentice Hall, 1996.
- [6] Paul Jackson. Applying μ -Synthesis to Missile Autopilot Design[C]. Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, HI, 1990: 2993-2998.
- [7] Reichert, R.T. Robust Autopilot Design Using μ -Synthesis[C]. Proceedings of the American Control Conference, San Diego, CA, 1990: 2368-2373.
- [8] Wise K A, Mears B C, Poolla K. "Missile Autopilot Design Using H_∞ Optimal Control with μ -Synthesis[C]. Proceedings of the American Control Conference (San Diego,CA), American Automatic Control Council, Evanston, IL, 1990: 2363-2367.
- [9] Kytka P, Nordmann R C. Code Implementation for μ -Synthesis-Controller for Industry Application[J]. AIM, 2007.
- [10] 史忠科, 吴方向, 王蓓, 等. 鲁棒控制理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
- [11] Doyle J, Wall J, Stein G. Performance and Robustness Analysis for Structured Uncertainty[C]. Decision and Control, 1982 21st IEEE Conference on Dec.1982, 629-636.
- [12] Balas, G J, Doyle J C, Glover K, et al. μ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide[M]. USA: MUSYN Inc., Mineapolis, MN and The Mathworks, Inc., MA, 1995.
- [13] 张民, 陈欣, 陆宇平. 基于 μ 方法的空空导弹驾驶仪鲁棒性分析[J]. 兵工学报, 2010.