

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2012.03.003

CADET 在舰空导弹比例导引制导系统中的应用

彭绍雄, 李学园, 邹强

(海军航空工程学院飞行器工程系, 山东 烟台 264001)

摘要: 针对传统 Monte-Carlo 方法存在计算量大、耗时过长的缺点, 采用协方差分析描述函数技术 (the covariance analysis describing function technique, CADET) 法建立弹目相对运动方程。介绍统计协方差分析描述函数技术的原理, 讨论非线性系统的准线性化问题, 对协方差分析描述函数技术在比例导引制导系统中的应用进行分析, 并以实例说明。结果表明: 该方法在进行舰空导弹制导性能分析时耗时短、统计性能好、精度高, 明显优于传统 Monte-Carlo 法。

关键词: 协方差分析描述函数技术; 舰空导弹; 比例导引; 制导精度

中图分类号: TJ765.3 **文献标志码:** A

Application of CADET in Proportional Guidance Control System of Ship-to-Air Missile

Peng Shaoxiong, Li Xueyuan, Zou Qiang

(Dept. of Aircraft Engineering, Naval Aeronautical & Astronautical University, Yantai 264001, China)

Abstract: Aiming to the disadvantage of computational complex and long time-consuming of traditional Monte-Carlo method, establish guided missile target relative motion equation using the covariance analysis describing function technique (CADET). The principle of CADET is introduced in the paper. Then study the linearization of nonlinear function, analyze the application of CADET in proportional guidance control system. And give an example to analysis it. The results show that the method has the advantage of higher speed, statistical performance and precision in the guidance performance analysis. It is better than Monte-Carlo method.

Key words: CADET; ship-to-air missile; proportional guidance; guidance accuracy

0 引言

对具有随机输入的非线性时变系统进行统计分析, 传统的方法是采用 Monte-Carlo 方法, 由于此方法存在着计算量大、耗时过长的缺点, 使得在一些对快速性能要求较高的环境无法使用该方法。协方差分析描述函数技术 (the covariance analysis describing function technique, CADET) 是 20 世纪 70 年代由美国 A. Gelb 和 R. S. Warren 共同提出的对战术导弹制导系统性能进行统计分析的一种新方法, 它解决了 Monte-Carlo 方法快速性能较差的缺点, 可以应用于线性系统和非线性系统。舰空导弹制导精度分析是非线性系统, 因此, 笔者采用协方差分析描述函数技术对其进行分析。

1 系统的协方差分析

1.1 线性系统的协方差分析

线性连续系统统计动力学模型可以用式 (1) 表示为

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (1)$$

式中: $x(t)$ 是系统的状态向量; $w(t)$ 是强迫函数向量; $F(t)$ 为连续的 $n \times n$ 矩阵; $G(t)$ 为连续的 $n \times p$ 矩阵。

$x(t)$ 为 n 维, $w(t)$ 为 p 维; $w(t)$ 假定为由一均值向量 $b(t)$ 和一随机分量 $u(t)$ 组成, 而且 $u(t)$ 是具有谱密度矩阵 $Q(t)$ 的高斯白噪声过程, 即式 (2):

$$\begin{cases} w(t) = b(t) + u(t) \\ b(t) = E[w(t)] \\ E[u(t) \cdot u^T(t) = Q(t) \cdot \delta(t - \tau) \end{cases} \quad (2)$$

类似地, 状态向量包括确定性分量 $m(t)$ 和随机分量 $r(t)$, 即式 (3):

$$\begin{cases} x(t) = m(t) + r(t) \\ m(t) = E[x(t)] \\ p(t) = E[r(t) \cdot r^T(t)] \end{cases} \quad (3)$$

式 (2)、式 (3) 中 $\delta(t - \tau)$ 为 Dirac 函数; $m(t)$ 和 $p(t)$ 分别是状态向量 $x(t)$ 的数学期望和协方差矩阵。

由于 $F(t)$ 和 $G(t)$ 都是确定性矩阵, 对式 (1) 两边同时取数学期望, 得到系统状态向量 $m(t)$ 的传播

收稿日期: 2011-09-03; 修回日期: 2011-10-24

作者简介: 彭绍雄(1966—), 男, 湖北人, 硕士, 副教授, 从事导弹武器系统工程研究。

方程, 即式 (4):

$$\dot{m}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot m(t) + \mathbf{G}(t)b(t) \quad (4)$$

经过推导^[1], 得到 $p(t)$ 的误差传播方程, 即式

(5):

$$\dot{p}(t) = \mathbf{F}(t)p(t) + p(t)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \quad (5)$$

1.2 非线性系统的协方差分析

导弹的运动方程组属于非线性系统, 一般连续时变非线性系统可用如式 (6) 微分方程表示:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + \mathbf{G}(t)w(t) \quad (6)$$

式 (6) 表明, 随机输入是线性地加入到系统方程中的, 因此, 式 (6) 并不能完全代表实际情况, 但是假如系统具有式 (7) 形式:

$$\dot{x}(t) = f(x, y, t) \quad (7)$$

且 y 是相关随机过程, 它可以表示为满足下面方程的随机向量, 如式 (8):

$$\dot{y}(t) = f_n(y, t) + G_n(t)w(t) \quad (8)$$

因此可以利用增广状态向量式 (9)、式 (10):

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\dot{x}_a = \begin{bmatrix} f(x_a, t) \\ f_n(y, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ G_n(t) \end{bmatrix} w(t) \quad (10)$$

可以看到, 式 (7) 和式 (8) 的一般性方程被转化为式 (6) 的形式, 由于所有物理可实现的随动过程都是相关的, 因此假定 y 用式 (8) 表示并没有特殊限制。为方便起见, 把式 (6) 看作系统的基本模型不失其普遍性。

对式 (6) 两边取数学期望得式 (11):

$$\dot{m}(t) = \hat{f} + \mathbf{G}(t)b(t) \quad (11)$$

式中, $\hat{f} = E[f(x, t)]$ 。应用随机微积分概念, 可以得到式 (12):

$$\dot{p}(t) = E[f(x, t) \cdot r^T] + E[r \cdot f(x, t)^T] + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \quad (12)$$

可以化简为与式 (5) 相对应的非线性系统 $p(t)$ 的误差传播方程为:

$$\dot{p}(t) = \mathbf{N}(t)p(t) + p(t)\mathbf{N}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) \quad (13)$$

式中: \mathbf{N} 为辅助矩阵, 满足 $\mathbf{N}(t) \cdot p(t) = E[f(x, t) \cdot r^T(t)]$, 由于 $p(t)$ 是正定的, 则 $\mathbf{N}(t) = E[f(x, t) \cdot r^T(t)] \cdot p^{-1}(t)$ 。

2 统计线性化

统计线性化是根据状态向量 $x(t)$ 的概率密度函

数形式, 在较大的 x 变化范围内, 用一个线性函数来逼近非线性函数 $f(x, t)$, 其本质是对系统的每一个非线性用一个或几个近似的, 对输入幅度灵敏的线性增益来代替, 所得到的准线性增益 (描述函数) 的解析式取决于反方向特性所假定的非线性输入形式和所利用的误差准则^[1]。

统计线性化是一种拟线性化的方法, 是根据系统随机状态变量 $x(t)$ 的联合概率密度形式。在 $x(t)$ 的变化范围内, 用一个线性函数来逼近非线性函数, 即对于随机状态变量 $x(t)$ 的非线性函数 $f(x, t)$, 求出一个拟线性表达式 $\hat{f} + N(x - m)$, 使得线性化误差所造成的均方差 $E[eSe^T]$ 达到最小, 其中 S 为任何半正定矩阵, $e = f(x, t) - \hat{f} - N(x - m)$, $m = E[x]$ 是随机状态变量 $x(t)$ 的均值, $r = x - E[x]$ ^[2-3]。

对均方差 $E[e \cdot e^T] = E\{[f - \hat{f} - N(x - m)] \cdot [f - \hat{f} - N(x - m)]^T\}$ 的偏导数取零, 并且可以验证其二阶偏导大于 0, 得到满足误差最小的条件为:

$$\begin{cases} \hat{f} = E[f(x, t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)p(x)dx \\ \mathbf{N} = E[(f(x, t) - \hat{f}) \cdot r^T(t) \cdot P^{-1}] \end{cases} \quad (14)$$

\hat{f} , \mathbf{N} 统称为描述函数, 在 $x(t)$ 为联合正态分布条件下, 描述函数具有以下简化形式:

$$\begin{cases} \hat{f} = E[f(x, t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)p(x)dx \\ \mathbf{N} = \frac{df}{dm} \end{cases} \quad (15)$$

文献[4]中指出: 假设系统状态变量 $x(t)$ 为正态分布, 只有对高斯输入的线性系统才是严格成立的, 而对非高斯输入的线性和非线性系统, 往往是近似的, 尽管输入是高斯的, 而非线性的输出一般来说也是非高斯的。由中心极限定理可知: 当经过低通滤波器后, 随机过程趋于高斯过程, 因此, 当信号通过系统传递时, 可以借助系统的线性部分来保证非高斯的非线性输出结果近似是正态的。

3 CADET 在比例导引制导系统中的应用

假设来袭目标作等速直线运动, 导弹等速运动, 在目标等速直线运动的情况下, 弹目相对运动方程可以表示成式 (16) 形式^[5]:

$$\begin{cases} \dot{r} = -V_T \cos q - V \cos[Kq_0 - \theta_0 - (K-1)q] \\ \dot{q} = \{V_T \sin q + V \sin[Kq_0 - \theta_0 - (K-1)q]\} / r \end{cases} \quad (16)$$

所选地面坐标系 Axy 的原点与导弹初始位置重

合，弹道的参数为 (x, y) ，则有式 (17) 成立。

$$\begin{cases} x = r_0 \cos q_0 - V_T t - r \cos q \\ y = r_0 \sin q_0 - r \sin q \end{cases} \quad (17)$$

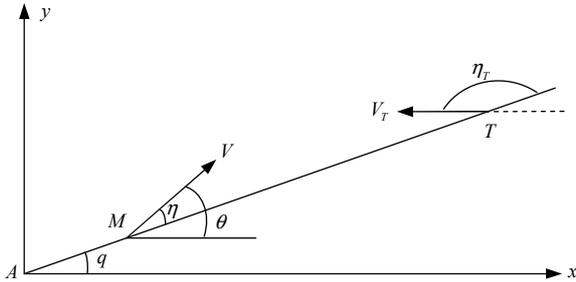


图 1 比例导引下的弹目相对运动关系

由图 1 可以得到式 (18)：

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \theta = V \cos(Kq_0 - \theta_0 - Kq) \\ \dot{y} = V \sin \theta = -V \sin(Kq_0 - \theta_0 - Kq) \end{cases} \quad (18)$$

选取状态变量 $x_1 = r$, $x_2 = q$, $x_3 = x$, $x_4 = y$ ，根据式 (11) 求得系统状态向量的传播方程为式 (19)：

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = -V_T \cdot e^{-\frac{1}{2}P_{22}} \cos m_2 - V \cdot e^{-\frac{1}{2}(K-1)^2 P_{22}} \cos m_2^* \\ \dot{m}_2 = V_T \cdot e^{-\frac{1}{2}P_{22}} (E[1/x_1] \sin m_2 + P^* \cos m_2) + \\ V \cdot e^{-\frac{1}{2}(K-1)^2 P_{22}} \{E[1/x_1] \sin m_2^* - (K-1)P^* \cos m_2^*\} \\ \dot{m}_3 = V \cdot e^{-\frac{1}{2}K^2 P_{22}} \cos(Kq_0 - \theta_0 - Km_2) \\ \dot{m}_4 = -V \cdot e^{-\frac{1}{2}K^2 P_{22}} \sin(Kq_0 - \theta_0 - Km_2) \end{cases} \quad (19)$$

式中： $E[1/x_1] = 1/m_1 + P_{11}/m_1^3$ ； $P^* = (-1/m_1^2 - 3P_{11}/m_1^4)$ 。
 P_{12} ； $m_2^* = Kq_0 - \theta_0 - (K-1)m_2$ 。

根据式 (16)，可以得出系统动态矩阵 $N(t)$ 中的非零元素表达式为

$$\begin{aligned} n_{12} &= V_T \cdot e^{-\frac{1}{2}P_{22}} \sin m_2 - V(K-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}(K-1)^2 P_{22}} \sin[Kq_0 - \theta_0 - (K-1)m_2] \\ n_{21} &= V_T \cdot e^{-\frac{1}{2}P_{22}} (E[1/x_1] \sin m_2 + P^* \cos m_2) + \\ &V \cdot e^{-\frac{1}{2}(K-1)^2 P_{22}} \{E[1/x_1] \sin m_2^* - (K-1)P^* \cos m_2^*\} \\ n_{22} &= V_T \cdot e^{-\frac{1}{2}P_{22}} (E[1/x_1] \cos m_2 - P^* \sin m_2) + \\ &V \cdot e^{-\frac{1}{2}(K-1)^2 P_{22}} \{-(K-1)E[1/x_1] \cos m_2^* - (K-1)^2 P^* \sin m_2^*\} \\ n_{32} &= VK \cdot e^{-\frac{1}{2}K^2 P_{22}} \sin(Kq_0 - \theta_0 - Km_2) \\ n_{42} &= VK \cdot e^{-\frac{1}{2}K^2 P_{22}} \cos(Kq_0 - \theta_0 - Km_2) \end{aligned}$$

式中： $E[1/x_1] = -1/m_1^2 - 3P_{11}/m_1^4$ ； $P^* = (2/m_1^2 + 12P_{11}/m_1^5) \cdot P_{12}$ 。

根据上式求出的系统状态矩阵，便可以利用式 (13) 求出系统 $p(t)$ 的误差传播方程如式 (20)：

$$\dot{p}(t) = N(t)p(t) + p(t)N^T(t) \quad (20)$$

4 算例及分析

假设导弹、目标距离为 8 000 m，目标等速直线飞行，飞行高度为 10 m，飞行速度为 300 m/s，导弹飞行速度为 700 m/s，导弹以固定倾斜角 15° 发射，导弹进行比例导引的比例系数为 4，根据式 (19) 和式 (20)，仿真得到在飞行过程中，舰空导弹导引精度变化曲线如图 2~4 所示。

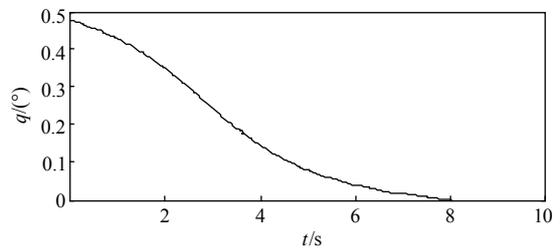


图 2 视线角误差

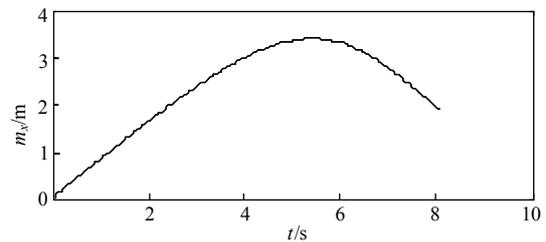


图 3 舰空导弹飞行的横向误差

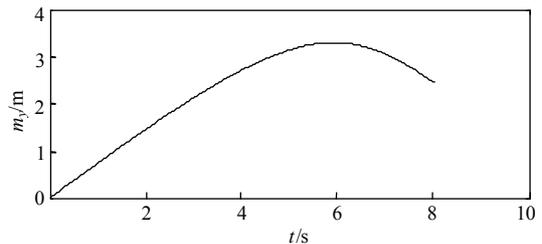


图 4 舰空导弹飞行的纵向误差

从图 2~4 可以看出，视线角随着弹目距离的接近而不断减小，舰空导弹的飞行坐标误差随着导弹的爬升与下降有一个起伏变化。通过 CADET 对舰空导弹比例导引下的误差仿真，最终的制导精度满足脱靶量的要求。