doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2012.03.013

# 基于双线性插值拟合的山形曲面面积计算

王胜兵，戴明强，黄登斌
（海军工程大学理学院，武汉 430033）

**摘要**：为了准确估算山形曲面面积，采用基于双线性插值拟合的方法进行计算。利用分片双线性插值函数拟合山形曲面函数，将山形曲面面积的计算转化为分片双线性插值函数所表示的分片曲面面积之和的计算，给出山形曲面面积近似计算公式和数值算例。同时，讨论近似计算的计算精度，并给出一个数值算例。数值结果表明：该方法能有效拟合山形曲面，并计算山形曲面面积。

**关键词**：双线性插值；曲面面积；计算精度
**中图分类号**：TJ02　　**文献标志码**：A

# Calculating of Chevron Curved Surface Area Based on Bilinear Interpolation Subdivision Surface Fitting

Wang Shengbing, Dai Mingqiang, Huang Dengbin
(*College of Science*, *Naval University of Engineering*, *Wuhan* 430033, *China*)

**Abstract:** In order to accurately estimate chevron curved surface, bilinear interpolation fitting method to calculate was applied. Using triangulating bilinear interpolation function fitting chevron curved surface function, the curved surface area calculation about chevron curved surface was translated into the corresponding subdivision surface area of the calculation of triangulating bilinear interpolation functions, thus the area of chevron curved surface approximate calculation formula and a numerical example was given. Further the calculation precision of the approximate calculation was discussed in the thesis, and finally presenting a numerical example, the numerical results show that the validity of the formula.

**Key words:** bilinear interpolation; curved surface area; calculation precision

## 0 引言

在实际应用中常常需要估算山形面积，如估算山上植树造林需要的种子数，在军事上考察对一个山头进行毁伤打击的效果等。由于实际中往往只能给出山上若干个点的海拔高度，不能给出曲面的方程，给曲面计算带来了困难。因此，笔者利用分片双线性插值函数拟合山形曲面函数，对山形曲面面积进行估算。

## 1 双线性插值拟合山形曲面计算曲面面积

假设山形曲面的方程为 $z = f(x,y)\quad (x,y)\in\Omega$，利用 $x_{i+1} = x_i + d, (i = 0,1,\cdots,N)$，$y_{j+1} = y_j + d$，$(j = 0,1,\cdots,M)$ 将平面区域 $\Omega$ 分割若干个小区域。考虑一个正方形网格 $\Omega_{i,j}$，网格 4 个顶点的平面坐标分别为 $(x_{i,j}, y_{i,j})$、$(x_{i,j}+d, y_{i,j})$、$(x_{i,j}, y_{i,j}+d)$ 以及 $(x_{i,j}+d, y_{i,j}+d)$，此 4 点所对应的地形海拔高度分别为 $z_{i,j}$，$z_{i+1,j}$，$z_{i,j+1}$ $z_{i+1,j+1}$，可以构造双线性插值函数：

$$z = (1-u)(1-v)z_{i,j} + u(1-v)z_{i+1,j} + (1-u)vz_{i,j+1} + uvz_{i+1,j+i} \tag{1}$$

其中 $u = \dfrac{x - x_{i,j}}{d}$，$v = \dfrac{y - y_{i,j}}{d}$。该公式即为把正方形网格 $\Omega_{i,j}$ 所对应的山形曲面拟合为一个双曲抛物面。

下面求该双曲抛物面在正方形网格 $\Omega_{i,j}$ 所对应的曲面面积 $S_{ij}$。由曲面面积的计算公式，该曲面面积 $S_{ij}$ 可表示为如下形式：

$$S_{ij} = \iint\limits_{\Omega_{ij}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = d\int_0^1\int_0^1 \sqrt{d^2 + [(1-v)(z_{i+!,j} - z_{i,j}) + v(z_{i+1,j+1} - z_{i,j+1})]^2 + [(1-u)(z_{i,j+1} - z_{i,j}) + u(z_{i+1,j+1} - z_{i,+1,j})]^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2}$$

**收稿日期**：2011-09-12；**修回日期**：2011-10-24
**作者简介**：王胜兵(1964—)，男，湖北人，硕士，副教授，从事微分方程数值解以及优化计算的研究。

由此可以得到所求山形曲面的表面积 $S$ 可以近似表示为：

$$S \approx S^d = \sum_i \sum_j S_{ij} \tag{3}$$

由于在地表面的边界曲线不一定刚好在网格线上，如图 1，由于 $i, j$ 的选取，会给 $S^0$ 的计算带来偏差。

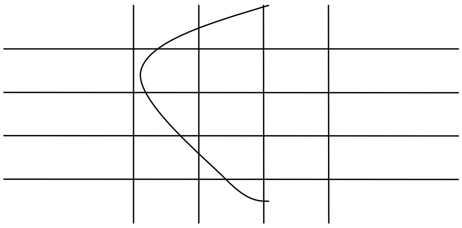

**图 1　边界曲线的变化**

针对山形曲面的边界落在网格之中的情形，如何选取 $i, j$ 来计算山形的面积，可以采用以下方法进行计算及修正。

1) 针对一个网格，如果有一个以上的网格点落在边界曲线的内部，则将该网格作为 $\Omega_{i,j}$，按照此方法计算得到的山形曲面面积近似记为

$$S_1 = \sum_i \sum_j S_{ij} \tag{4}$$

2) 针对一个网格，当 4 个网格点全部落在边界曲线的内部，才将该网格作为 $\Omega_{i,j}$，按照此方法计算得到的山形曲面面积近似记为

$$S_2 = \sum_i \sum_j S_{ij} \tag{5}$$

3) 利用以上 2 种情形的结果做平均，该平均值即为山形曲面面积的近似值

$$S \approx \frac{1}{2}(S_1 + S_2) \tag{6}$$

## 2　精度分析

假设山形曲面面积为 $S$，利用分片双线性插值拟合山形曲面在网格步长为 $d$ 时近似面积为 $S^d$，若 $S = S^d + C \cdot d^{\alpha}$，利用下面的方法可以估算 $\alpha$，从而得到山形面积的计算精度[1]。

将网格步长减半，则有：

$$S = S^{d/2} + C \cdot (\frac{d}{2})^{\alpha} \tag{7}$$

进一步减半可得：

$$S = S^{d/4} + C \cdot (\frac{d}{4})^{\alpha} \tag{8}$$

从而有

$$\left| \frac{S^{d/2} - S^{d/4}}{S^{d/2} - S^{d}} \right| = (\frac{1}{2})^{\alpha} \tag{9}$$

利用网格步长逐步减半的计算结果，可以估算收敛阶 $\alpha$ 为：

$$\alpha = \frac{1}{\ln 2} \left| \ln \left| S^{d/2} - S^{d} \right| - \ln \left| S^{d/2} - S^{d/4} \right| \right| \tag{10}$$

## 3　数值仿真

利用实际中一座山峰在相应网格点的海拔高度，进行数值仿真[2]。采用的曲面方程为：$z = 1 - x^2 - y^2 \quad (x^2 + y^2 \le 1)$，经计算可以得到该曲面的面积为：

$$s = 5.330\,4$$

当取网格步长为 $d$=0.002 5，利用 Matlab 软件计算可以得到相应的数值结果见表 1。

**表 1　数值仿真结果**

| 步长 | 面积的近似值 |
| --- | --- |
| $d$ | 5.323 9 |
| $d$/2 | 5.327 2 |
| $d$/4 | 5.328 8 |

表 1 的结果以及 $\alpha$ 的计算公式得到 $\alpha$ = 1.044 4，这与理论导出的计算精度为一阶收敛是一致的，表明该方法效果良好。

## 4　结论

笔者利用分片双线性插值拟合山形曲面，成功地计算出山形曲面面积。实验结果表明：该方法取得了预期效果，具有广阔的应用前景。

## 参考文献：

[1] 王仁宏．数值逼近[M]．北京：高等教育出版社，2003: 256-257.

[2] 沈佳．经典插值算法仿真[J]．西安：科技资讯，2009(30): 219-220.