

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2012.06.015

一种基于球面调和函数的 3D 模型仿真方法

张斌, 吴斌

(西南科技大学信息工程学院, 四川 绵阳 621010)

摘要: 描述了一种用于三维图像数据重构的可视化的新方法, 其核心在于将三维图像数据模型分解为一组球面调和函数的正交基的扩展系数。利用最小二乘法将模型的原始数据坐标拟合成一组球面调和函数的正交基的扩展系数。这些系数可以通过个人计算机运算重建图像的三维模型。理论与实验表明: 该方法的建模速度远高于一些传统的建模方法, 为解决三维图像数据可视化中数据量大, 建模速度缓慢等问题提供了一种新的解决方法。

关键词: 球面调和函数; Matlab; 三维模型; 建模; 仿真

中图分类号: TP391.4 **文献标志码:** A

3D Model Simulation Method Based on Spherical Harmonic Functions

Zhang Bin, Wu Bin

(School of Information Engineering, Southwest University of Science & Technology, Mianyang 621010, China)

Abstract: This paper describes a new method for the visualization of 3D image data reconstruction, and its core theme is that decompose 3D model into a group of orthogonal basis extended coefficient of spherical harmonic function. The paper using least squares method for transforming the original coordinate into orthogonal basis extended coefficient of spherical harmonic function. These coefficients can reconstruct image 3D model through personal computer (PC). The theory and test shows that the modeling speed of method is much higher than some traditional method of modeling. It may provide a new way for solving the problems in the field of 3D models reconstruction for large visualization data and slow modeling speed.

Key words: spherical harmonic functions; Matlab; 3D models; modeling; simulation

0 引言

随着计算机技术的发展, 三维物体模型的重构以及建模在计算机视觉和图像处理应用方面发挥着日益重要的作用。医学图像分析是其中一种十分重要的应用。它可以帮助人们诊治和治疗疾病、实施手术模拟及仿真、对于不同的人体器官进行比较并区分病灶等。但由于受到模型图像数据量庞大, 算法复杂, 以及计算机处理速度慢等因素的限制, 导致三维物体的重构以及建模发展的进度也比较缓慢。要在现有条件下提高三维物体的重构以及建模速度, 关键是要寻求一种高效并且快速的数值建模方法。

球面调和函数(spherical harmonics, SH)来源于求解拉普拉斯方程, 已在许多领域得到了较为广泛的应用。它最早应用于测绘学方面, 例如: 地球重力场等方面的研究, 在大地测绘学中的应用, 天体引潮力的计算等, 后来延伸到简单三维几何体(正方体、圆柱体、多面体等)的识别, 计算机图形学中的

光照模型, 以及三维物体模型的平滑性等方面^[1]。对于类似于球体的三维几何体来说, 用球面调和函数重建需要的阶数相对较低, 如果采用其他函数作为重构的基函数, 无论数据的几何形态如何, 都需要很多的控制点来进行重构, 会增加数据量^[3]。因此, 笔者采用球面调和函数对三维模型进行构造。

1 球面调和函数的数学原理

球面调和函数是一个定义在球面坐标系下的一组函数, 并且构成球面上的一组标准正交基, 通常用符号 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 来表示^[11]。通常来说, 球面调和函数是定义在复数域上的, 但是在文中涉及到的是它的实数表达形式^[10]:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{2}K_l^m \cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta), & m > 0 \\ \sqrt{2}K_l^m \sin(-m\varphi)P_l^{-m}(\cos\theta), & m < 0 \\ K_l^0 P_l^0(\cos\theta), & m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: P_l^m 为 m 阶 1 次连带勒让德多项式; K_l^m 是球

收稿日期: 2012-03-05; 修回日期: 2012-04-19

作者简介: 张斌(1983—), 男, 河南人, 硕士研究生, 从事虚拟现实、三维图像建模、力触觉反馈方向的研究。

面调和函数的正交化因子，其表达式为：

$$K_1^m \sqrt{\frac{(2l+1)(1-|m|)!}{4\pi(l+|m|)}} l \in R^+, -l \leq m \leq l \quad (2)$$

式中， l 为从 0 开始的正整数，表示频率波段指数，其低的值表示低频球面调和函数基函数^[2]。所以，第 m 阶球面调和函数有 $2m+1$ 个基函数。

2 基于球面调和函数的 3D 模型建模方法

设模型数据的取样顶点为 N ，记为 M_N ，取其质心为坐标原点，则其第 i 个顶点的坐标为 $B_i(X_i, Y_i, Z_i)$ ，利用球面坐标系与直角坐标系的转换公式，将其转换为 $(R_i, \theta_i, \varphi_i)$ ，将 N 个顶点的 (θ, φ) 的值代入 $Y(\theta, \varphi)$ ，利用 M 阶球面调和函数逼近原模型，计算原模型的 x_i, y_i, z_i 与 $Y(\theta, \varphi)$ 的最小二乘误差 E ，可以得到如下公式：

$$\begin{cases} E_x = \sum_{i=1}^N \left[x_i - \sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jx} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right]^2 \\ E_y = \sum_{i=1}^N \left[y_i - \sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jy} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right]^2 \\ E_z = \sum_{i=1}^N \left[z_i - \sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jz} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right]^2 \end{cases} \quad (3)$$

其中， C_{jx}, C_{jy}, C_{jz} 为重构模型的球面调和函数的扩展系数。

将 E_x, E_y, E_z 分别对 C_{jx}, C_{jy}, C_{jz} 求偏导数，有：

$$\begin{cases} \frac{\delta E_x}{\delta C_{jx}} = 2 \sum_{i=1}^N \left[x_i - \sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jx} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right] Y_k(\theta_i, \varphi_i) \\ \frac{\delta E_y}{\delta C_{jy}} = 2 \sum_{i=1}^N \left[y_i - \sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jy} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right] Y_k(\theta_i, \varphi_i) \\ \frac{\delta E_z}{\delta C_{jz}} = 2 \sum_{i=1}^N \left[z_i - \sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jz} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right] Y_k(\theta_i, \varphi_i) \end{cases} \quad (4)$$

由此可以得到驻点方程如下

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{(M+1)^2} \left[\sum_{i=1}^N Y_k(\theta_i, \varphi_i) Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right] C_{jx} = \sum_{i=1}^N x_i Y_k(\theta_i, \varphi_i) \\ \sum_{j=0}^{(M+1)^2} \left[\sum_{i=1}^N Y_k(\theta_i, \varphi_i) Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right] C_{jy} = \sum_{i=1}^N y_i Y_k(\theta_i, \varphi_i) \\ \sum_{j=0}^{(M+1)^2} \left[\sum_{i=1}^N Y_k(\theta_i, \varphi_i) Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right] C_{jz} = \sum_{i=1}^N z_i Y_k(\theta_i, \varphi_i) \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{令 } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_{N-1} \\ z_N \end{bmatrix},$$

$$Y_k = \begin{bmatrix} Y_k(\theta_1, \varphi_1) \\ Y_k(\theta_2, \varphi_2) \\ \dots \\ Y_k(\theta_{N-1}, \varphi_{N-1}) \\ Y_k(\theta_N, \varphi_N) \end{bmatrix}, \text{ 因此可以把式 (5) 写成:}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{(M+1)^2} (Y_j, Y_k) C_{jx} = (x, Y_k) \\ \sum_{j=0}^{(M+1)^2} (Y_j, Y_k) C_{jy} = (y, Y_k) \\ \sum_{j=0}^{(M+1)^2} (Y_j, Y_k) C_{jz} = (z, Y_k) \end{cases} \quad (6)$$

利用求解此方程所得到球面调和函数的扩展系数

$$[C_{0x}, C_{1x}, \dots, C_{(M+1)2x}] [C_{0y}, C_{1y}, \dots, C_{(M+1)2y}] [C_{0z}, C_{1z}, \dots, C_{(M+1)2z}]$$

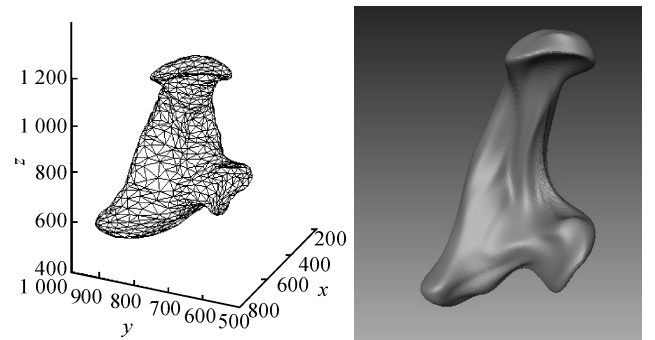
即可重新构建得到模型^[10]：

$$\begin{cases} B_{Nx}^- = \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jx} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right) \\ B_{Ny}^- = \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jy} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right) \\ B_{Nz}^- = \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_{jz} Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right) \end{cases} \quad (7)$$

在以上各式中， $(k=0,1,2,\dots,(M+1)^2)$ 。

3 实验结果与相关数据

实验的模型数据是 Matlab 中的三维模型结构数据，如果条件允许，也可使用 MRI 或者其他医学图像数据。2 组模型的原图以及用球面调和函数方法重建的效果图(主要使用了 Amria 软件)见图 1、2。



(a) Matlab 原始数据 (b) 球面调和函数重建效果图

图 1 模型 1 的原图及重建效果图

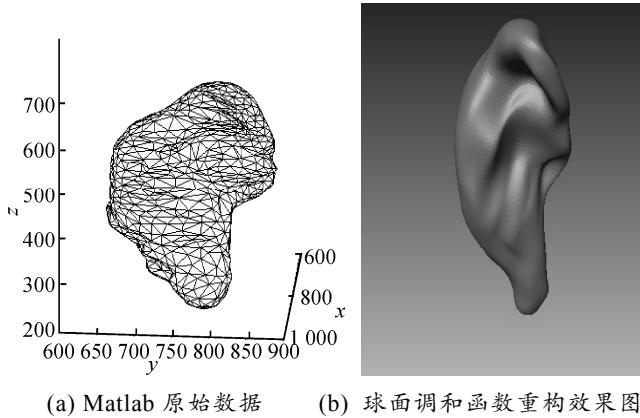


图 2 模型 2 的原图及重建效果图

上述图像, 是在球面调和函数的阶数为 6 时所得到的图像。

笔者利用球面调和函数对原模型在所有取样点上半径的相对误差的均方差来比较 2 个模型之间的近似程度, 其公式^[4]如下:

$$\Delta R = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\left(R_i - \sum_{j=0}^{(M+1)^2} C_j Y_j(\theta_i, \varphi_i) \right)^2 / R_i^2 \right]} / N \tag{8}$$

式中: N 为原模型的取样点数; M 为球面调和函数的重构阶数。

在球面调和函数的不同阶数情况下, 所得到的数据如表 1 所示。

表 1 SH 建模统计对比表

阶数	原模型大小/KB	SH 方法模型大小/KB	均方差/%	运算时间/s
6	104	12.5	15.087 3	0.578 000
7	104	17.3	15.174 9	0.671 000
10	332	16.8	9.083 4	1.347 000
16	332	20.7	7.783 9	4.289 000

表 1 中的运算时间指单独计算一次的平均时间, 总体计算时间需要加上各个阶数运算时所消耗的时间。

从表 1 可以看出, 阶数要求越高, 所得到的图像越精细, 但相应所付出的时间也较长。一般来说, 阶数在 8 阶左右, 就能和原始图像数据有较高的拟合程度。图 1、2 中球面调和函数所构建的模型在其自身阶数的控制下, 可以很好地表达原模型的表面轮廓以及相关信

息, 平滑性表达的更为出色, 并且由于球面调和函数的多尺度特性, 在今后的柔性体受力变形等方面有更多的相关研究。

4 结论

实验结果证明: 球面调和函数在重构三维物体, 建模速度等方面性能较好, 克服了以往算法的数据量大, 算法复杂等困难, 但耗时略长。在实际应用中, 可以选择服务器或者多台计算机平行计算, 以进一步减少数据量, 提高计算速度。目前, 该方法还处于理论探索研究阶段, 下一步, 将对球面调和函数在柔性体变形、力反馈等方面的应用进行探索。

参考文献:

- [1] Shen L, Makedon F. Spherical mapping for processing of 3-D closed surfaces[J]. Image and Vision Computing, 2006, 24(7): 743-761.
- [2] Praun E, Hoppe H. Spherical parametrization and remeshing[J]. ACM Trans. on Graphics, 2003: 22(3): 340-349.
- [3] Shen L, Ford J, Makedon F, Saykin A. A surface based approach for classification of 3D neuro anatomic structures[J]. Intelligent Data Analysis, 2004: 8(6): 519-542.
- [4] Zhou K, Bao H, Shi J. 3D surface filtering using spherical harmonics[J]. CAD, 2004, 36(4): 363-375.
- [5] Huang H, Shen L, et al. Surface alignment of 3D spherical harmonic models: Application to cardiac MRI analysis[J]. In MICCAI'2005, LNCS 3749, 2005: 67-74.
- [6] Chung M K, Robbins S, Dalton K M, Davidson R J, Alexander A L, Evans A C. Cortical thickness analysis in autism via heat kernel smoothing[J]. NeuroImage, 2005, 25: 1256-1265.
- [7] Bulow T. Spherical diffusion for 3D surface smoothing[J]. IEEE Trans. on PAMI, 2004, 26(12):1650-1654.
- [8] Gerig G, Styner M, et al. Shape analysis of brain ventricles using SPHARM[J]. In IEEE MMBIA, 2001: 171-178.
- [9] Matheny, A, Goldgof, D, B.: The use of three- and-four dimensional surface harmonics for rigid and nonrigid shape recovery and reprsentation[J]. IEEE PAMI, 1995, 17(10): 967-981.
- [10] 杨华军. 数学物理方法与计算机仿真[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [11] 刘保柱, 苏彦华, 张宏林. Matlab 7.0 从入门到精通[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010.