

doi: 10.3969/j.issn.1006-1576.2012.09.011

## 考虑平面形状误差的配合表面接触状态研究

左富昌, 张之敬, 金鑫

(北京理工大学机械与车辆学院, 北京 100081)

**摘要:** 为提高装配接触分析的准确性, 对考虑平面形状误差的配合表面接触状态进行研究。以平面为对象, 考虑加工导致的形状误差, 提出一种形状误差与装配力共同作用下的配合表面接触状态理论分析方法。在此基础上, 提出配合误差的概念及计算方法, 揭示形状误差对装配精度的影响关系。随后, 采用有限元法验证所提方法。结果表明: 该方法是有用的, 准确预测了考虑形状误差情况下配合表面的接触状态, 并计算了配合误差。文中所提方法可为考虑形状误差的装配精度预测与分析提供参考。

**关键词:** 形状误差; 配合表面; 接触状态; 配合误差

**中图分类号:** TP206 **文献标志码:** A

## Research on Contact State of Mating Surfaces Taking into Account Plane Form Error

Zuo Fuchang, Zhang Zhijing, Jin Xin

(School of Mechanical &amp; Vehicle, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** To improve the accuracy of assembly contact analysis, the contact state between mating surfaces with form error was studied. With the plane as object, the contact state analysis method of mating surfaces considering the form errors and assembly forces was proposed. On this basis, the concept of mating variation and its calculating method was proposed, in to reveal the effects of form errors on the assembly accuracy. Subsequently, the finite element method was adopted to verify the proposed method. The results show that the method is effective, accurately predicts the contact state of mating surfaces with form errors, and calculate the complex error. The proposed method can provide a basis for prediction and analysis of the assembly accuracy when considering the form errors.

**Key words:** form error; mating surface; contact state; mating variation

### 0 引言

装配体中各零件之间的约束关系包括接触与对齐等, 是通过零件之间的位置关系满足的。对于只有 2 个零件的装配体而言, 基准件的位置可视为固定, 由于零件加工误差的存在, 被装配件的位置需要通过相对其公称位置的刚体位移实现。2 个零件之间最普遍的约束方式为沿同一表面保持接触。零件加工误差引起的被装配件刚体位移将导致装配精度发生变化。

Lee 等人<sup>[1]</sup>描述了使用平面接触与圆柱面接触的装配模型, 模型指出 2 种接触类型下调整零件位置与方向的方法; Rocheleau 等人<sup>[2]</sup>提出一种装配建模方法, 方法中的约束使零件之间沿平面、圆柱面、球面与锥面接触, 平面-平面接触为表面接触, 表示一种低级的约束对, 其他为线接触或点接触; Charles 等人<sup>[3]</sup>与 Clement 等人<sup>[4]</sup>同时指出, 如果 2 个零件的相对位置由 2 个或多个约束对约束, 那么

实际效果可以缩减为单个约束。但上述方法并未考虑配合表面存在的误差, 尤其是形状误差, 更未考虑装配力等外力作用下零件的变形, 因此结果与实际情况之间存在一定的差别。此外, 对于形状误差导致的接触变形, 文献[5]研究了对接装配中表面粗糙度及外力作用下产生的变形对装配精度的影响, 但仅通过模拟验证所提方法, 并未研究实际加工的零件。

### 1 接触状态分析

笔者提出一种基于差表面的配合表面接触点搜索方法, 包括差表面定义、差表面极小值搜索和接触点确定 3 个步骤。

#### 1.1 差表面的定义

差表面是指根据 2 个存在形状误差且存在相互配合关系的表面实际测量值之差得到的虚拟表面, 用以进行配合表面接触点的搜索。差表面表示同一

收稿日期: 2012-04-21; 修回日期: 2012-07-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(51075035); 国家重大科研仪器与设备专项基金(51127004)

作者简介: 左富昌(1983—), 男, 河南人, 博士研究生, 从事精密机械系统装配精度控制研究。

坐标系内 2 个配合表面之间的距离, 因此差表面的极小值点即为可能最小距离, 可能最小距离位置为 2 个配合表面可能的接触点。

考虑到配合表面的形状误差, 通过定义差表面, 确定它们之间所有的接触点。获得差表面的方法如下: 首先, 将各自测量坐标系测量所得的形状误差转化到同一坐标系内, 通过测量数据  $A_1$  与  $A_2$  之差获得差表面, 即  $A_d=A_1-A_2$ 。通过定义差表面, 配合表面的形状误差被转化到一个表面上, 即其中一个配合表面存在形状误差, 而另一个配合表面变为理想表面。为了便于理解, 实际的三维配合表面被简化为位于  $XOY$  坐标系内的二维配合表面,  $Y$  轴正向与负向分别为 2 个配合表面的法向。2 个存在形状误差的配合表面和对应的差表面如图 1 所示。

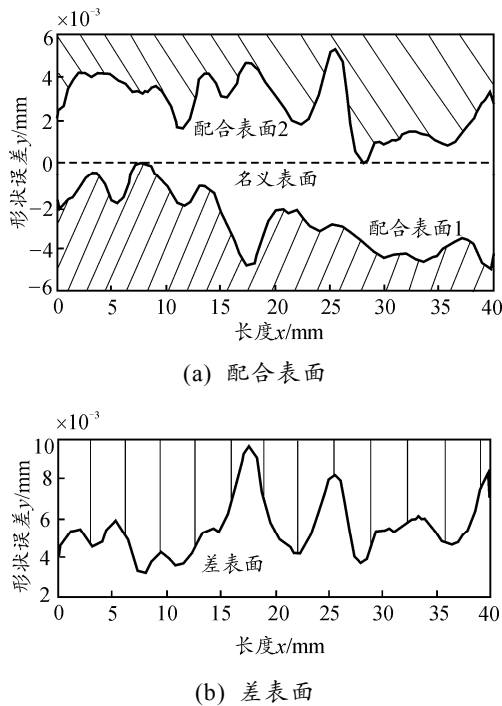


图 1 2 个配合表面及其差表面

如前所述, 差表面的极小值点为可能最小距离, 可能最小距离位置为 2 个配合表面可能的接触点。因此, 图 1(b) 中带剖面线的一侧表示非接触点侧, 另一侧为接触点侧。

### 1.2 差表面极小值搜索

采用一种自适应的搜索方法寻找差表面的极小值。以三维装配为例, 如图 2 所示的测量点位置, 假定  $(x_j, y_k)(j=2,3,\dots,J-1; k=2,3,\dots,k-1)$  为差表面上的测量点 (指差表面上对应配合表面测量点的点),  $(x_{j-1}, y_k)$ 、 $(x_{j+1}, y_k)$ 、 $(x_j, y_{k-1})$  和  $(x_j, y_{k+1})$  为  $(x_j, y_k)$  周围

的 4 个相邻点,  $J$  与  $K$  分别为  $X$  和  $Y$  方向的测量点个数。

首先, 仅在  $X$  轴方向搜索并移动中心点, 直到第  $k$  行的倒数第 2 个测量点, 即逐行搜索。如果  $z_{j,k} < z_{j-1,k}, z_{j,k} < z_{j+1,k}, z_{j,k} < z_{j,k-1}$  且  $z_{j,k} < z_{j,k+1}$  同时成立, 则  $z_{j,k}$  为差表面上的一个极小值, 为了减小搜索次数, 此时将中心点移至同行的测量点  $(x_{j+2}, y_k)$ ; 否则, 如果  $z_{j,k} < z_{j-1,k}, z_{j,k} < z_{j+1,k}, z_{j,k} < z_{j,k-1}$  和  $z_{j,k} < z_{j,k+1}$  中的任何一个不等式不成立, 则  $z_{j,k}$  不是差表面上的极小值, 此时将中心点移至测量点  $(x_{j+1}, y_k)$ 。当第  $k$  行搜索完成时, 将中心点移至第  $(k+1)$  行的第 2 个测量点, 即测量点  $(x_j, y_{k+1})$ , 重复上述过程。对于边缘的测量点, 极小值搜索只需与其相邻的 3 个测量点的  $z$  值比较。当搜索遍历整个差表面之后, 就可以确定差表面上的所有极小值点。

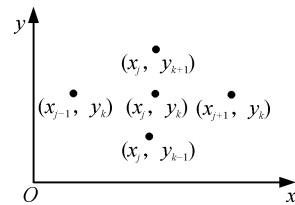


图 2 测量点位置示意图

### 1.3 接触点确定

研究表明<sup>[6]</sup>, 由于形状误差的存在, 配合表面之间仅在若干点接触。一般情况下, 二维配合存在 2 个接触点, 三维配合存在 3 个接触点。基于搜索的差表面极小值点, 可计算所有可能的接触点。

#### 1.3.1 二维配合

对于二维配合, 假设差表面上任意 2 个极小值点分别为  $P_1$  和  $P_2$ , 它们在坐标系  $XOY$  中的空间坐标分别为  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 则通过  $P_1$  和  $P_2$  的直线方程为

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

构建的理想直线为

$$y = Ax + B \tag{2}$$

其中  $A, B$  由式 (1) 计算所得。

然后对差表面上所有测量点的值  $y_i$  与理想直线上点的  $y$  值比较:

$$y(i) = Ax_i + B < y_i \tag{3}$$

如果对于所有的测量点, 式 (3) 均成立, 说明

极小值点  $P_1$  和  $P_2$  为一组可能的接触点。因此，通过上述计算和比较，可能确定多组接触点。为了确定实际的接触点，在忽略零件重力的情况下，还需考虑装配力作用线与接触点的位置关系。

假设装配力作用线与可能接触点连线的交点为  $(x_3, y_3)$ ，可得到向量  $\mathbf{a}_1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ ， $\mathbf{a}_2 = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$ 。根据向量共线的性质，有  $\mathbf{a}_1 = k \cdot \mathbf{a}_2$ ，若  $k < 0$ ，说明交点位于两接触点之间；若  $k > 0$ ，说明交点不在两接触点之间。如果装配力作用线与接触点连线的交点位于两接触点之间，则该组接触点为实际的接触点；如果装配力作用线与接触点连线的交点不在两接触点之间，则该组接触点不是实际的接触点。

1.3.2 三维配合

对于三维配合，假设差表面上任意 3 个极小值点分别为  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$ ，若  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$  的空间坐标分别为  $(x_1, y_1, z_1)$ ， $(x_2, y_2, z_2)$  和  $(x_3, y_3, z_3)$ ，则它们确定的理想平面  $\overline{P_1P_2P_3}$  的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

构建的理想平面为

$$Ax + By + Cz = D \quad (5)$$

其中  $A, B, C, D$  由式 (4) 计算所得。

然后对差表面上所有测量点的值  $z_i$  与理想平面上点的  $z$  值比较：

$$z(i) = \frac{D - Ax_i - By_i}{C} < z_i \quad (6)$$

如果对于所有测量点，式 (6) 均成立，则说明极小值点  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$  为一组可能的接触点。因此，通过上述计算和比较，可能会确定多组接触点。为了确定实际的接触点，在忽略零件所受重力的情况下，还需要考虑装配力作用线与接触点的位置关系。

假设装配力作用线与接触点围成三角形的交点  $P_4$  的坐标为  $(x_4, y_4, z_4)$ ，利用面积法判断  $P_4$  与  $\triangle P_1P_2P_3$  的位置关系：位于三角形内部或不在三角形内部。根据海伦公式分别求解  $\triangle P_1P_2P_3$ 、 $\triangle P_1P_2P_4$ 、 $\triangle P_2P_3P_4$  和  $\triangle P_1P_3P_4$  的面积  $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$ ，首先求线段  $P_1P_2$ 、 $P_2P_3$ 、 $P_3P_1$ 、 $P_4P_1$ 、 $P_4P_2$  和  $P_4P_3$  的长度，分别如下：

$$\begin{aligned} L_{P_1P_2} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ L_{P_2P_3} &= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2} \\ L_{P_3P_1} &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} L_{P_1P_4} &= \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2} \\ L_{P_2P_4} &= \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2} \\ L_{P_3P_4} &= \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2} \\ L_0 &= (L_{P_1P_2} + L_{P_2P_3} + L_{P_3P_1}) / 2 \\ L_1 &= (L_{P_1P_2} + L_{P_2P_4} + L_{P_4P_1}) / 2 \\ L_2 &= (L_{P_2P_3} + L_{P_3P_4} + L_{P_4P_2}) / 2 \\ L_3 &= (L_{P_3P_1} + L_{P_3P_4} + L_{P_4P_1}) / 2 \end{aligned} \quad (8)$$

则 4 个三角形的面积  $S_0$ 、 $S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$  分别为：

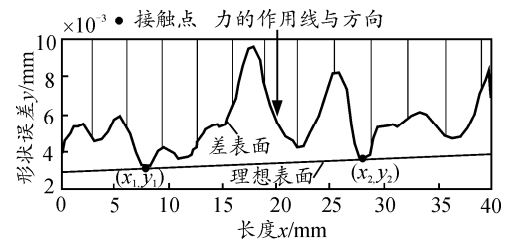
$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{L_0(L_0 - L_{P_1P_2})(L_0 - L_{P_2P_3})(L_0 - L_{P_3P_1})} \\ S_1 &= \sqrt{L_1(L_1 - L_{P_1P_2})(L_1 - L_{P_2P_4})(L_1 - L_{P_4P_1})} \\ S_2 &= \sqrt{L_2(L_2 - L_{P_2P_3})(L_2 - L_{P_3P_4})(L_2 - L_{P_4P_2})} \\ S_3 &= \sqrt{L_3(L_3 - L_{P_3P_1})(L_3 - L_{P_3P_4})(L_3 - L_{P_4P_1})} \end{aligned} \quad (9)$$

判断下式

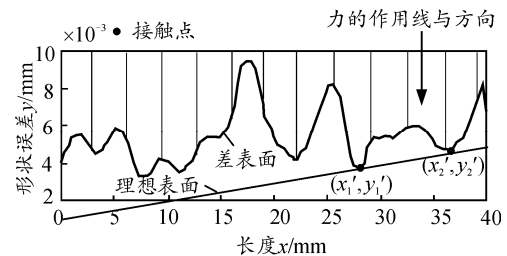
$$S_0 < S_1 + S_2 + S_3 \quad (10)$$

若式 (10) 成立，则  $P_4$  位于  $\triangle P_1P_2P_3$  外部，否则位于三角形内部或边上(统称为内部)。如果装配力作用线与接触点组成三角形的交点位于三角形内部，则该组接触点为实际的接触点；否则，该组接触点不是实际的接触点。

图 3 所示为二维情况下的两配合表面在不同装配力作用下的接触点。



(a) 第 1 种情况下的接触点



(b) 第 2 种情况下的接触点

图 3 2 个配合表面之间的可能接触点

从图3中可以看出, 不同的装配力作用线, 将导致不同的接触点。

## 2 基于接触点的配合误差计算

为表示形状误差对装配精度的影响, 需要将配合表面存在的形状误差转化为被装配件的位置误差和方向误差, 因此引入位置误差和方向误差模型, 以表示配合误差。配合误差指2个配合表面形状误差引起的被装配件偏离其理想装配位置与方向的变动量, 即形状误差引起的被装配零件的位置误差与方向误差。采用位置向量和3个欧拉旋转角(俯仰、平摇和侧滚)组成的方向向量<sup>[7]</sup>表示配合误差。在公称导出要素及其替代导出要素上分别建立坐标系, 位置与方向向量组成二者之间的微分运动向量, 形式为  $\mathbf{u}=[d_x, d_y, d_z, \delta_x, \delta_y, \delta_z]^T$ 。

根据上文得到的2个配合表面上的接触点, 可分别确定2个替代要素, 二维配合中为直线, 三维配合中为平面。对于二维配合, 根据差表面上的接触点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 可得到配合表面1上的接触点坐标为  $(x_1, y_1^{A_1})$  和  $(x_2, y_2^{A_1})$ , 配合表面2上的接触点坐标为  $(x_1, y_1^{A_2})$  和  $(x_2, y_2^{A_2})$ , 通过它们可分别计算得到如下直线方程:

$$\frac{y - y_1^{A_1}}{y_2^{A_1} - y_1^{A_1}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (11)$$

$$\frac{y - y_1^{A_2}}{y_2^{A_2} - y_1^{A_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (12)$$

假设直线方程分别为:

$$L_1: y = a_1x + b_1 \quad (13)$$

$$L_2: y = a_2x + b_2 \quad (14)$$

分别在直线  $L_1$  和  $L_2$  上建立如图4所示的坐标系  ${}^0\text{MCS}$ 、 ${}^1\text{MCS}$  与  ${}^2\text{MCS}$ , 分别称为公称配合坐标系、子配合坐标系1与子配合坐标系2。

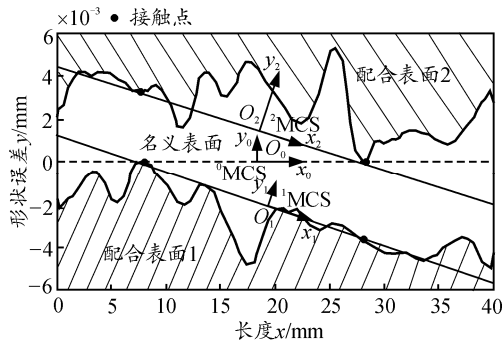


图4 公称配合坐标系与子配合坐标系

图4中  ${}^1\text{MCS}$ 、 ${}^2\text{MCS}$  和  ${}^0\text{MCS}$  之间的微平移和微旋转分别写为  $\mathbf{u}_{M1}=[d_{x1}', d_{y1}', d_{z1}', \delta_{x1}', \delta_{y1}', \delta_{z1}']^T$  与  $\mathbf{u}_{M2}=[d_{x2}', d_{y2}', d_{z2}', \delta_{x2}', \delta_{y2}', \delta_{z2}']^T$ , 称其为配合误差分量, 即根据接触点确定替代表面与公称表面之间的位置误差与方向误差。则配合误差可以写为  $\mathbf{u}_M=[d_x', d_y', d_z', \delta_x', \delta_y', \delta_z']^T = [d_{x1}', d_{y1}', d_{z1}', \delta_{x1}' - \delta_{x2}', \delta_{y1}' - \delta_{y2}', \delta_{z1}' - \delta_{z2}']^T$ 。根据式(13)和式(14), 可以得到两直线之间绕  $z$  轴的微小旋转量  $\delta_z'$  与沿  $y$  轴方向的微小平移量  $d_y'$  分别如下:

$$d_y' = a_1x_c + b_1 \quad (15)$$

$$\delta_z' = \left| \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2 \cdot a_1} \right| \quad (16)$$

其中,  $x_c$  为长度方向的中点。

对于三维配合, 可以根据差表面上的接触点  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  和  $(x_3, y_3, z_3)$ , 确定配合表面1上的接触点分别为  $(x_1, y_1, z_1^{A_1})$ ,  $(x_2, y_2, z_2^{A_1})$  和  $(x_3, y_3, z_3^{A_1})$ , 配合表面2上的接触点分别为  $(x_1, y_1, z_1^{A_2})$ ,  $(x_2, y_2, z_2^{A_2})$  和  $(x_3, y_3, z_3^{A_2})$ 。通过它们可分别计算得到如下平面方程:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1^{A_1} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2^{A_1} - z_1^{A_1} \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3^{A_1} - z_1^{A_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1^{A_2} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2^{A_2} - z_1^{A_2} \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3^{A_2} - z_1^{A_2} \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

假设计算得到的平面方程分别为:

$$P_1: z = A_1x + B_1y + C_1 \quad (19)$$

$$P_2: z = A_2x + B_2y + C_2 \quad (20)$$

则两平面的法向量分别为:

$$\mathbf{n}_1 = [A_1, B_1, 1] \quad (21)$$

$$\mathbf{n}_2 = [A_2, B_2, 1] \quad (22)$$

则平面  $P_1$  与  $x$  轴和  $y$  轴的夹角分别为:

$$\delta_{x1} = \arccos((\mathbf{n}_1 \times \mathbf{e}_1) / (|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{e}_1|)) \quad (23)$$

$$\delta_{y1} = \arccos((\mathbf{n}_1 \times \mathbf{e}_2) / (|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{e}_2|)) \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_2$  分别为  $X$  轴和  $Y$  轴的单位向量。

同理, 平面  $P_2$  与  $X$  轴和  $Y$  轴的夹角分别为:

$$\delta_{x2} = \arccos((\mathbf{n}_2 \times \mathbf{e}_1) / (|\mathbf{n}_2| \cdot |\mathbf{e}_1|)) \quad (25)$$

$$\delta_{y2} = \arccos((\mathbf{n}_2 \times \mathbf{e}_2) / (|\mathbf{n}_2| \cdot |\mathbf{e}_2|)) \quad (26)$$

若  $(x_c, y_c)$  为平面的中心点, 则配合误差的  $z$  轴方向平移分量为

$$d_z' = A_1 x_c + B_1 y_c + C_1 \quad (27)$$

从而根据式 (23)~(27), 可得三维配合的配合误差  $u_M$ 。假设配合表面 1 为基准, 则  $u_M = [0, 0, d_z', \delta_{x1} - \delta_{x2}, \delta_{y1} - \delta_{y2}, 0]^T$ 。

### 3 实例验证

如图 5, 零件 1 和零件 2 均为回转体, 二者之间为平面与平面接触, 配合处为 2 个尺寸相同的圆形平面, 直径为 62 mm。2 个圆柱面的直径为 40 mm, 长度为 20 mm。主要装配精度要求为圆柱面 B 与圆柱面 A 的同轴度, 圆柱面 A 为设计基准与测量基准。分析可知, 配合表面的形状误差将对两圆柱面的同轴度产生影响。仅考虑 2 个配合表面存在的形状误差, 分析计算配合表面的接触状态, 并在此基础上计算其配合误差。

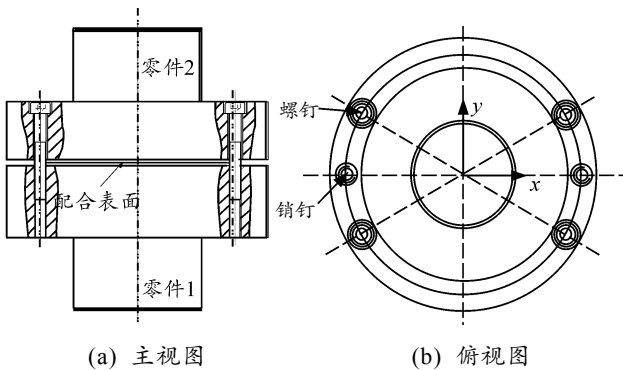
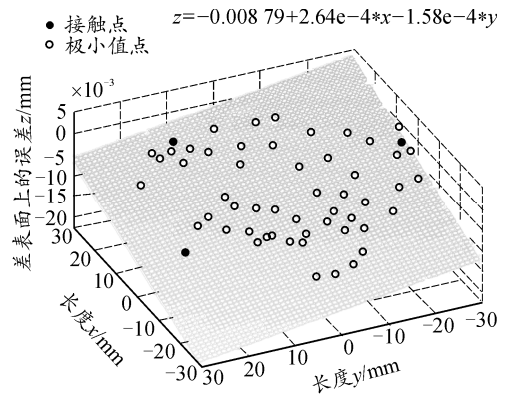
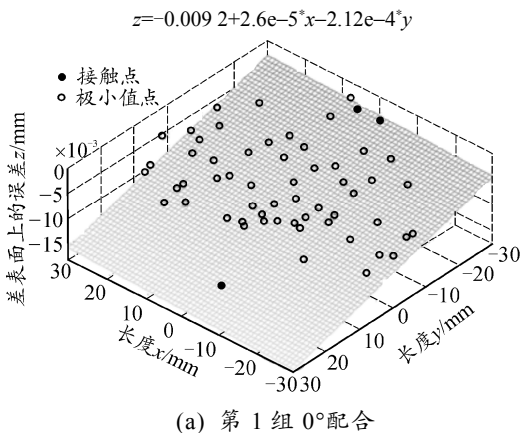
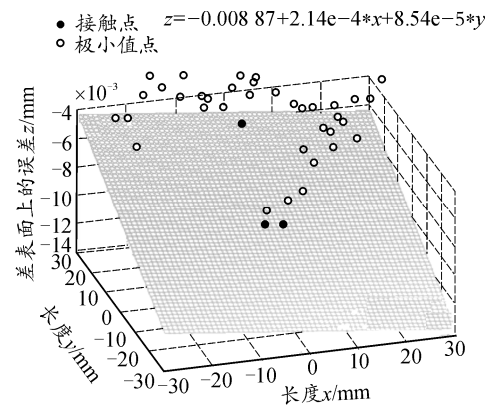


图 5 三维装配体的装配图

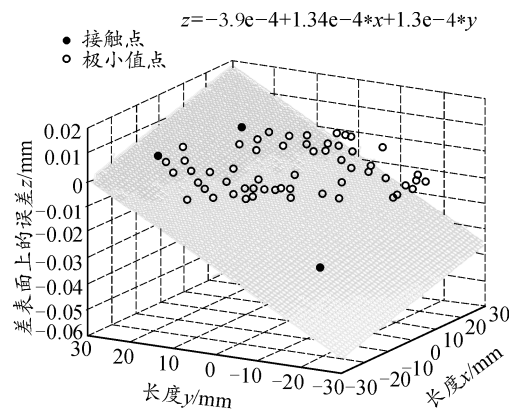
针对 5 套装配零件, 计算确定的接触点, 以及根据接触点求得的平面方程如图 6, 篇幅原因, 此处仅给出 2 组进行说明。



(b) 第 1 组 180° 配合



(c) 第 2 组 0° 配合



(d) 第 2 组 180° 配合

图 6 配合表面接触点及确定的理想平面

从图 6 可以看出, 不同配合分组中的接触点位置及接触点确定的理想平面方程不同, 且相同配合分组、不同配合角度的接触点情况也不相同。另外, 不同配合分组中接触点确定的理想平面方程的常数项符号均一致, 均为负值, 定性说明各组装配沿  $z$  轴的平移误差基本一致。根据上述确定的接触点计算的配合误差如表 1。

表 1 三维装配的配合误差

组号	角度/ (°)	微分运动向量形式的配合误差
1	0	$u_{M1}=[0, 0, 0.009\ 9, 0.012\ 1, 9.5e-4, 0]^T$
	180	$u_{M2}=[0, 0, 0.008\ 8, 0.009\ 0, 0.015\ 2, 0]^T$
2	0	$u_{M3}=[0, 0, 0.009\ 2, -0.006\ 9, 0.001\ 4, 0]^T$
	180	$u_{M4}=[0, 0, -0.002\ 9, -8.2e-4, 0.010\ 8, 0]^T$
3	0	$u_{M5}=[0, 0, 0.006\ 8, 0.028\ 6, -0.004\ 2, 0]^T$
	180	$u_{M6}=[0, 0, 0.006\ 8, 0.024\ 5, -0.003\ 4, 0]^T$
4	0	$u_{M7}=[0, 0, 0.007\ 2, 0.009\ 1, -0.012\ 9, 0]^T$
	180	$u_{M8}=[0, 0, 0.007\ 9, 0.008, -0.042\ 5, 0]^T$
5	0	$u_{M9}=[0, 0, 0.017\ 0, 0.006\ 7, -0.041\ 4, 0]^T$
	180	$u_{M10}=[0, 0, 0.018\ 6, -0.014\ 2, 0.014\ 2, 0]^T$

采用有限元软件计算上述实例的接触状态, 以及产生的变形位移如图 7。

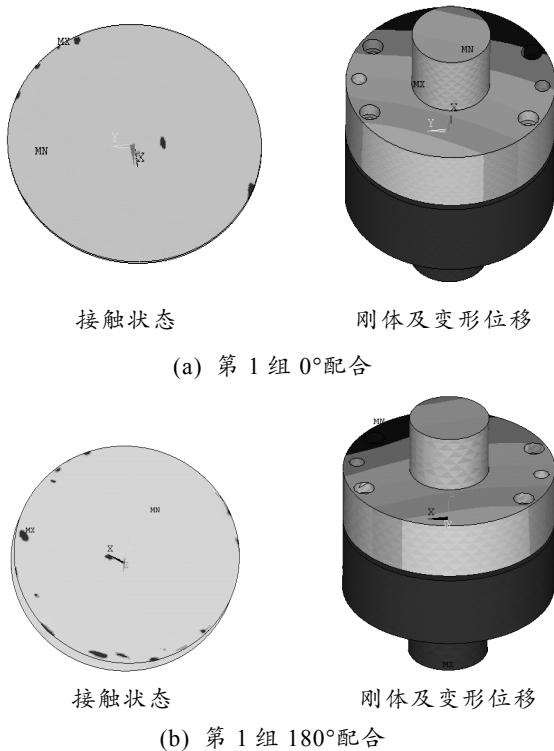


图 7 接触状态数值分析结果

从图 7 可知: 1) 配合表面为局部接触; 2) 不同配合分组导致被装配体产生大小和方向均不同的位移, 即配合误差。装配力破坏了理论上的三点接触状态, 产生变形附加误差, 本例中一般小于 5 μm, 虽然与形状误差相比较小, 但不容忽视, 需将其叠

加到理论计算的配合误差中。

### 4 结论

笔者从考虑配合表面形状误差的角度, 研究 2 个表面的接触状态, 以及由此导致的配合误差。建立了形状误差与装配精度之间的关系, 即已知形状误差, 可通过文中所提方法求解 2 个配合表面的配合误差。实验结果表明: 形状误差与装配力共同作用下的配合表面接触状态理论分析方法以及基于此的配合误差计算方法是有效的, 可为考虑形状误差的装配精度预测与分析提供参考。笔者仅针对平面之间的配合开展了研究, 实际装配中配合形式多种多样, 如圆柱面与圆柱面配合, 而且可能几种配合形式同时存在, 因此下一步的工作是将文中的方法扩展至其他形式的配合。

### 参考文献:

- [1] Lee K, Gossard D C. A hierarchical data structure for representing assemblies: part 1[J]. Computer-Aided Design, 1985, 17(1): 15-19.
- [2] Rossignac J R. Constraints in constructive solid geometry[C]. Proceedings of the 1986 workshop on Interactive 3D graphics, 1987: 93-110.
- [3] Charles B., Clement A., Desrochers A., et al. Controlling a mechanical part designed with a feature based system[C]. Montreal: In ASME Design Automation Conference, 1989.
- [4] Clément A., A. Desrochers and A. Riviere. Theory and practice of 3-D tolerancing for assembly[C]. USA: Proceedings of the CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Penn State University, 1991(5).
- [5] Lee N K S, Yu G, Joneja A, et al. The modeling and analysis of a butting assembly in the presence of workpiece surface roughness and part dimensional error[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2006, 31(5): 528-538.
- [6] Samper S., et al. Modeling of 2d and 3d assemblies taking into account form errors of plane surfaces[J]. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 2009, 9(4): 1005-1016.
- [7] Wirtz, A. Vectorial Tolerancing for Production Quality Control and Functional Analysis in Design[C]. CIRP International Working Seminar on Computer-Aided Tolerancing, 1991: 77-84.