

doi: 10.7690/bgzdh.2013.08.001

一类时滞兰彻斯特方程的奇异摄动方法

周津¹, 程燕², 谢英超¹

(1. 陆军军官学院研究生管理大队, 合肥 230031; 2. 陆军军官学院基础部, 合肥 230031)

摘要: 考虑兰彻斯特方程反应时间因素在战斗要素中的重要作用, 建立信息化条件下的时滞兰彻斯特战斗模型。通过构造边界层函数, 用时滞奇异摄动理论研究时滞兰彻斯特方程的各次近似解, 并对解进行精度比较。结果表明: 该奇异摄动方法简单、有效, 具有较高的精度, 能得到解的表达式以及解析运算, 可进一步对兰彻斯特方程进行定性及定量的研究。

关键词: 时滞; 兰彻斯特方程; 奇异摄动

中图分类号: TJ03 **文献标志码:** A

Singular Perturbation Method for One-Class of Time Delay Lanchester Equation

Zhou Jin¹, Cheng Yan², Xie Yingchao¹

(1. *Administrant Brigade of Postgraduate, Army Officer Academy of PLA, Hefei 230031, China;*

2. Basic Department, Army Officer Academy of PLA, Hefei 230031, China)

Abstract: Considering the important role of Lanchester equation of reaction time factor in combat elements, time delay Lanchester combat model is established under the condition of informationization. Each approximate solution of Lanchester equation using singular perturbation theory was constructed by constructing boundary layer function method, then comparing the accuracies for the solutions verifies the asymptotic expansion possesses a better accuracy and this kind of approximate solution is analyzing, thus further qualitative and quantitative research on the Lanchester equation can be done on this basic research.

Key words: time delay; Lanchester equation; singular perturbation

0 引言

兰彻斯特方程全称为兰彻斯特战斗动态方程, 由英国人弗雷德里克·威廉·兰彻斯特于 1914 年创立。它分析了战斗过程中各种可量化的因素, 然后用数学模型来定量描述战斗的过程。目前很多专家在兰彻斯特的理论基础上进行了诸多改进^[1-6], 开发出了兰彻斯特混合律、对数律等。

时滞兰彻斯特方程一般不能用初等方法求出其精确解, 因此需要用有效的方法求出其近似解。在信息化条件下的战争中, 信息优势所带来的更直接更有效的影响是交战双方的战斗反应时间上的更加迅速与及时, 笔者充分考虑这一反应时间因素在战斗要素中的重要作用, 建立了信息化条件下的时滞兰彻斯特战斗模型, 应用奇异摄动方法构造了模型的摄动解, 并对这种摄动解进行了精度比较。

1 基于兰彻斯特平方律的时滞兰彻斯特方程

一类基于兰彻斯特平方律的时滞兰彻斯特方程的模型为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a_1 y - \alpha x + p \\ \frac{dy}{dt} = -b_1 x(t-\tau) - \beta y + q \\ x|_{-t \leq t \leq 0} = \varphi(t) \\ y|_{t=0} = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$, $y(t)$ 分别表示红蓝双方的兵力; a_1 表示蓝方对敌的兵力损耗系数; b_1 表示红方对敌的兵力损耗系数; $\alpha, \beta > 0$ 分别表示红蓝双方的非战斗减员系数; p, q 分别表示红蓝双方的兵力补充速度, τ 为时滞参数, $\varphi(t), y_0$ 分别表示红蓝双方的初始兵力。

2 构造外部解

首先构造模型 (1) 的外部解。

设 $\tau = 0$, 可得到模型 (1) 的退化方程组为

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = -a_1 y_0 - \alpha x_0 + p \\ \frac{dy_0}{dt} = -b_1 x_0 - \beta y_0 + q \\ x(0) = \varphi(0) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 2013-02-04; 修回日期: 2013-03-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (41175058)

作者简介: 周津(1987—), 男, 河北人, 在读硕士, 从事应用数学研究。

微分方程组 (2) 的解为

$$\begin{cases} x_0(t) = A_0 + E_0 e^{(\mu-\lambda)t} + \frac{\mu+\kappa}{b_1} F_0 e^{-(\mu-\lambda)t} \\ y_0(t) = B_0 - \frac{\mu+\kappa}{a_1} E_0 e^{(\mu-\lambda)t} + F_0 e^{-(\mu-\lambda)t} \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; $\kappa = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; $\mu = \sqrt{\kappa^2 + a_1 b_1}$;

$$A_0 = \frac{q a_1 - p \beta}{a_1 b_1 - \alpha \beta}; \quad B_0 = \frac{p b_1 - q \alpha}{a_1 b_1 - \alpha \beta}; \quad a_1 b_1 - \alpha \beta = \mu^2 - \lambda^2;$$

$$E_0 = \frac{a_1 b_1}{2\mu(\mu+\kappa)} \left\{ \left[\varphi(0) + \frac{\beta+\mu+\kappa}{a_1 b_1 - \alpha \beta} p \right] - \frac{\mu+\kappa}{b_1} \left[y_0 + \frac{\alpha+\mu-\kappa}{a_1 b_1 - \alpha \beta} q \right] \right\};$$

$$F_0 = \frac{a_1 b_1}{2\mu(\mu+\kappa)} \left\{ \frac{\mu+\kappa}{a_1} \left[\varphi(0) + \frac{\beta-\mu+\kappa}{a_1 b_1 - \alpha \beta} q \right] + \left[y_0 + \frac{\alpha-\mu-\kappa}{a_1 b_1 - \alpha \beta} p \right] \right\}。$$

笔者假设式 (1) 具有如下形式的渐近解

$$\begin{aligned} x(t, \tau) &= U(t, \tau) + \tau W(\eta, \tau) \\ y(t, \tau) &= V(t, \tau) + \tau Z(\eta, \tau) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $U(t, \tau)$, $V(t, \tau)$ 为外部解。

$$U(t, \tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t) \tau^i, \quad V(t, \tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i(t) \tau^i \quad (5)$$

$W(\eta, \tau)$, $Z(\eta, \tau)$ 为初始激波层校正项

$$W(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} w_i(\eta) \tau^i, \quad Z(\eta, \tau) = \sum_{i=0}^{+\infty} z_i(\eta) \tau^i \quad (6)$$

其中 $\eta = \frac{t}{\tau}$ 是伸长变量, 且当 $\eta = \frac{t}{\tau} \rightarrow +\infty$ 时, 式 (6)

中的每个 $w_i(\eta)$ 、 $z_i(\eta)$ ($i=0, 1, \dots$) 均趋于零。

笔者首先按 τ 展开时滞函数 $x(t-\tau)$, 有

$$\begin{aligned} x(t-\tau) &= x(t) - \frac{dx(t)}{dt} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \tau^2 + \\ &\dots + (-1)^i \frac{1}{i!} \frac{d^i x(t)}{dt^i} \tau^i + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

将式 (4)~式 (7) 代入式 (1), 按 τ 展开相关项, 比较方程两端 τ^i 同次幂的系数。对于 τ^0 , 并注意到 u_0, v_0 与式 (3) 相同, 即

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0(t) \\ v_0(t) = y_0(t) \end{cases} \quad (8)$$

对于 τ^i ($i=1, 2, \dots$) 有

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = -a_1 v_i - \alpha u_i \\ \frac{dv_i}{dt} = -b_1 u_i - \beta v_i + b_1 I_{i-1}(t) \\ u_i(0) = -w_{i-1}(0) \\ v_i(0) = -z_{i-1}(0) \end{cases} \quad (9)$$

其中 I_{i-1} ($i=1, 2, \dots$) 为已知函数, 其结构表示为

$$I_{i-1}(t) = u'_{i-1} - u''_{i-2} + u'''_{i-3} - \dots - u^{(i)}_0。$$

从式 (9) 中可依次得到 $\{u_i(t), v_i(t)\}$ ($i=1, 2, \dots$) 的解为

$$\begin{cases} u_i(t) = A_i + E_i e^{(\mu-\lambda)t} + \frac{\mu+\kappa}{b_1} F_i e^{-(\mu-\lambda)t} \\ v_i(t) = B_i - \frac{\mu+\kappa}{a_1} E_i e^{(\mu-\lambda)t} + F_i e^{-(\mu-\lambda)t} \end{cases} \quad (10)$$

其中: $A_i = \frac{a_1 b_1 J_i}{a_1 b_1 - \alpha \beta}$; $B_i = \frac{-\alpha b_1 J_i}{a_1 b_1 - \alpha \beta}$; $E_i = \frac{a_1 b_1}{2\mu(\mu+\kappa)}$

$$\left\{ -w_{i-1}(0) - \frac{\mu+\kappa}{b_1} \left[z_{i-1}(0) + \frac{(\alpha+\mu-\kappa)b_1 J_i}{a_1 b_1 - \alpha \beta} \right] \right\}; \quad F_i =$$

$$\frac{a_1 b_1}{2\mu(\mu+\kappa)} \left\{ \frac{\mu+\kappa}{a_1} \left[-w_{i-1}(0) + \frac{(\beta-\mu+\kappa)b_1 J_i}{a_1 b_1 - \alpha \beta} \right] - z_{i-1}(0) \right\}。$$

于是只需知道 $w_{i-1}(0), z_{i-1}(0)$ ($i=1, 2, \dots$), 再由式 (8)、式 (10), 就可以得到时滞兰彻斯特模型 (1) 的外部解。

3 初始层校正项和方程的渐近解

为了构造初始层校正函数 $w_i(\eta), z_i(\eta)$ ($i=0, 1, \dots$), 利用分段积分方法^[7], 又由于受时滞参数的影响, 笔者将在区间 $s \leq \eta \leq s+1, s \geq 0$ 上进行计算, 分别得到初始层校正函数。首先将式 (4)~式 (7) 代入式 (1), 可得

$$\frac{dW(\eta, \tau)}{d\eta} = -a_1 \tau Z(\eta, \tau) - \alpha \tau W(\eta, \tau) + p \quad (\eta \geq 0) \quad (11)$$

$$\frac{dZ(\eta, \tau)}{d\eta} = -b_1 [U(\eta \tau, \tau) - \varphi(\tau(\eta-1))] - \beta \tau Z(\eta, \tau) + q \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ(\eta, \tau)}{d\eta} &= -b_1 [U(\eta \tau, \tau) - U(\tau(\eta-1), \tau) - \\ &\tau W(\tau(\eta-1), \tau)] - \beta \tau Z(\eta, \tau) + q \quad (\eta \geq 1) \end{aligned} \quad (13)$$

由式 (11)~式 (13) 和初始条件, 得

$$\frac{dw_0(\eta)}{d\eta} = p, \quad \frac{dz_0(\eta)}{d\eta} = q, \quad \eta \geq 0 \quad (14)$$

$$w_0(0) = z_0(0) = 0 \quad (15)$$

由式 (14)、式 (15), 可以得到 $w_0(\eta) = p\eta$,

$$z_0(\eta) = q\eta。$$

再比较式 (11)~式 (13) 关于 δ^i 次幂的系数, 有

$$\frac{dw_i(\eta)}{d\eta} = G_s^i(\eta), \quad \frac{dz_i(\eta)}{d\eta} = H_s^i(\eta) \quad (s \leq \eta \leq s+1; i=1, 2, \dots) \quad (16)$$

其中 $G_s^i(\eta)$, $H_s^i(\eta)$ ($s=0,1,\dots$) 为依次能够确定的已知函数。由式 (16), 可以得到:

$$w_i(\eta) = w_i(0) + \sum_{l=0}^{s-1} \int_l^{l+1} G_l^i(\xi) d\xi + \int_s^\eta G_s^i(\xi) d\xi \quad (s \leq \eta \leq s+1) \quad (17)$$

$$z_i(\eta) = z_i(0) + \sum_{l=0}^{s-1} \int_l^{l+1} H_l^i(\xi) d\xi + \int_s^\eta H_s^i(\xi) d\xi \quad (s \leq \eta \leq s+1) \quad (18)$$

所以有:

$$u_{i+1}(0) = -w_i(0) = -\sum_{l=0}^{\infty} \left(\int_l^{l+1} G_l^i(\xi) d\xi \right) \quad (19)$$

$$v_{i+1}(0) = -z_i(0) = -\sum_{l=0}^{\infty} \left(\int_l^{l+1} H_l^i(\xi) d\xi \right) \quad (20)$$

把式 (19)、式 (20) 代入式 (10), 依次确定时滞兰彻斯特模型式 (1) 的外部解; 同时也依次确定初始层校正函数 $w_i(\eta), z_i(\eta)$ ($i=1,2,\dots$)。将所得到的结果代入式 (4)~式 (6), 可得到模型 (1) 解的渐近展开式, 再由不动点定理, 就得到了模型 (1) 解的一致有效渐近展开式。

4 渐近解的精度比较

为了比较所求的渐近解与数值模拟解的精度误差, 给定模型 (1) 的如下一组无量纲参数:

$x(0)=8, y(0)=10; a_l=0.01, b_l=0.03; \alpha=\beta=0.02; p=q=0.01$; 令 $\tau=0.01$, 可得红方兵力 $x(t)$ 由奇异摄动方法得到一次渐近解曲线和由模拟方法得到的数值解曲线, 如图 1 所示; 以及蓝方兵力 $y(t)$ 由奇异摄动方法得到一次渐近解曲线和由模拟方法得到的数值解曲线, 如图 2 所示。

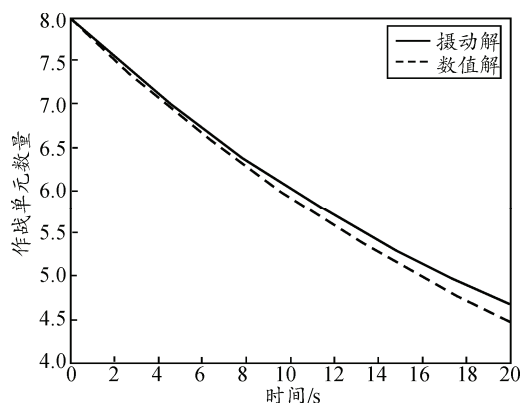


图 1 红方兵力摄动解曲线与数值解曲线

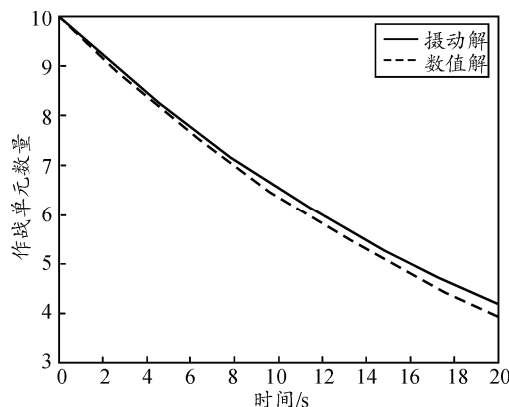


图 2 蓝方兵力摄动解曲线与数值解曲线

由图 1、图 2 可见, 时滞兰彻斯特模型 (1) 的摄动解曲线与模拟数值解曲线非常接近, 表明摄动解具有较高的精确度, 说明用奇异摄动方法构造的渐近解是一种有效的方法。

5 结束语

笔者提供的奇异摄动方法是一种简单而有效的方法。利用该方法得到解的表达式后, 还能继续进行解析运算, 比如:

- 1) 在一个战斗时间内, 对最终所求的渐近展开式进行积分运算, 可以预测出整个战争所投入的总兵力。
- 2) 对渐近展开式求二次导数, 可以清楚地看到作战双方兵力变化速度的快慢。

参考文献:

- [1] 史彦斌, 高宪军, 张安. 基于兰彻斯特方程的信息支援效能研究[J]. 航空计算技术, 2007, 37(5): 21-24.
- [2] 周奕, 周锦鹏, 郝维平. 基于兰彻斯特方程不同信息条件下的空战效能分析[J]. 航天控制, 2006, 24(2): 54-57.
- [3] 王泽辉. 基于兰彻斯特方程的信息力效能分析[J]. 中国管理信息化, 2011, 14(10): 48-50.
- [4] 刘震鑫, 于小红, 杨庆. 空间信息支援下的兰彻斯特作战模型[J]. 兵工自动化, 2011, 30(5): 18-20.
- [5] 张啸天, 李志猛, 邓红艳. 多维战争中兰彻斯特方程探讨[J]. 火力与指挥控制, 2008, 33(2): 5-7.
- [6] 王书敏, 董树军, 张庆捷. 作战运筹学[M]. 北京: 解放军出版社, 2007: 576-598.
- [7] Mo Jiaqi, Wen Zhaohui. Singularly perturbed reaction diffusion equations with time delay[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(6): 769-774.