doi: 10.7690/bgzdh.2013.09.004

资源约束条件下装备可用度建模与分析

徐廷学[1]，杨继坤[1]，陈红[2]

(1. 海军航空工程学院兵器科学与技术系，山东 烟台 264001；2. 海军装备军械保障部，北京 100081)

摘要：为了满足在可用度建模过程中资源约束条件下实现最优可用度，建立了一种平均稳态可用度模型。以单部件可修系统为研究对象，考虑保障资源的约束，在完美维修和立即更换的维修策略下，分别建立了当单元的寿命服从指数和一般分布情况下的平均稳态可用度模型，给出了相关证明和表达式；并通过算例验证了模型和算法的有效性。分析结果证明：在不考虑成本的前提下，增加维修设备能很好地提高系统的可用度。

关键词：资源约束；可用度；马尔可夫链

中图分类号：TJ760.1 **文献标志码**：A

Availability Model and Its Analysis for Equipment with Resource Constraints

Xu Tingxue[1], Yang Jikun[1], Chen Hong[2]

(1. *Department of Ordnance Science & Technology*, *Naval Aeronautical & Astronautical University*, *Yantai* 264001, *China*; 2. *Naval Equipment Department of Ordnance Support*, *Beijing* 100081, *China*)

Abstract: In order to meet the modeling process under resource constraints to achieve optimal availability, a mean steady-state availability model is established. For a one-unit repairable system, considering the resource constraints, under the perfect repair policy and instantaneous commencement of repair and installation to operation, the steady-state availability models assuming that the system unit's life has exponential or arbitrary distributions were established, and given proof and corollary. Some examples are used to demonstrate the feasibility and reasonability of the method. The results show that system availability could be significantly improved by increase repair facilities without considering the cost.

Key words: resource constrains; availability; Markov chain

0 引言

对装备可用度的评估，通常是根据装备某个时期内统计的各项时间因素值来进行计算，由于统计时间周期长，影响因素众多，这种方法不能很好地反应装备真实可用度水平[1]。目前研究装备等可修系统的主要数学工具是随机过程理论。文献[2]评定了出现保障延误时间的可修系统稳态可用度；文献[3-4]利用马尔科夫更新过程分析了侦查系统的可靠性和装甲装备的使用可用度；文献[5]基于更新过程进行了导弹武器系统的可用度分析。

在实际问题中，装备系统的修复过程都是需要保障资源来完成的，其中最主要的就是维修设备和备件。目前，相关领域研究主要集中在不同保障体制和维修策略下的可用度水平。文献[6-7]建立了两级备件保障系统的装备时变可用度评估模型；文献[8-9]建立了不同维修策略下的可用度模型。真正考虑可用度建模过程中资源约束的研究甚少。如何在满足资源约束的条件下实现最优可用度将成为一个新的研究热点。

基于此，笔者以单部件可修系统为研究对象，考虑保障资源约束(即拥有 r 个维修设备和 s 个备件的情况)，在完美维修和立即更换的维修策略下，分别建立当单元的寿命服从指数和一般分布情况下的平均稳态可用度模型，并给出相关证明和表达式。通过示例验证了模型和算法的有效性。

1 问题描述

在实际的保障中，会发现这样一类装备系统，其故障往往是由一种可修部件引起的，称之为单部件可修系统。起初，这类系统由一个部件进行工作，其余 s 个备件处于冷储备状态。当工作的部件发生故障时，其备件就立即更换，使系统仍然处于工作状态。故障件则进入维修队列，假设有 r 个维修设备，并且维修需要一段随机的时间，修复的故障件重新进入冷储备状态。由于备件数量的限制和维修

收稿日期：2013-03-17；修回日期：2013-04-22
基金项目：总装备部技术基础资助项目(2010317019)
作者简介：徐廷学(1962—)，男，河南人，博士，教授，博导，从事装备综合保障理论与方法研究。

需要时间，当所有的备件都处于维修或等待维修的状态时，系统处于故障状态[10]。

对这类系统的可用度，要充分考虑维修设备和备件等资源约束，将系统平均稳态可用度表示为：

$$A(\infty)=\frac{\text{MSUT}}{\text{MSUT+MSDT}} \tag{1}$$

其中：MSUT 为平均系统能工作时间；MSDT 评价系统不能工作时间。在许多现实的情况下，这种平均稳态可用度能为装备管理部门提供足够的决策依据。

对问题作如下假设[11]：

1) 系统部件的正常工作时间服从 $F(t)$分布；

2) 系统部件维修时间服从指数分布参数为β；

3) 系统部件修复如新；

4) 系统部件工作时间和修复时间相互独立；

5) 状态转移可在任意时刻进行，但在相当小的时间区间 Δt 内，不发生 2 次或 2 次以上的状态转移。

2　考虑资源约束的可用度建模方法

2.1　寿命服从指数分布的可用度分析

假设系统的故障是由某关键电子元器件故障所引起的，因而可以假定系统的寿命服从指数分布是合理的[12]。针对前面所描述的问题，可以得到系统的可用度模型。

假定只能在工作件故障或故障件被修好的时刻观测到系统的状态，并记录下故障件的数量。根据离散时间马尔科夫链[13-14]，定义状态 $i\ (i=0,1,\cdots,s,s+1)$ 为有 i 个故障件正在经历或等待维修。可知，当 $t=0$ 时状态为0，状态 $s+1$ 时系统故障，其他时刻系统处于工作状态。

令 ξ_i 为系统从状态 i 转移到相邻状态需要经历的随机逗留时间。根据指数分布无记忆性的特点，显然，ξ_i 是服从参数为 $a_i\alpha+b_i\beta$ 的指数分布，其中当 $0\leqslant i\leqslant s$ 时 $a_i=1$，$a_{s+1}=0$，$b_i=\min\{i,r\}$。此外，令 q_{ij} 为从状态 i 到状态 j 的转移概率，根据系统特征可得状态转移概率为：

$$\begin{aligned}&q_{i,i+1}=a_i\alpha\big/(a_i\alpha+b_i\beta)\\&q_{i,i-1}=b_i\beta\big/(a_i\alpha+b_i\beta)\\&q_{i,j}=0\text{；当}\ |i-j|\neq 1\end{aligned} \tag{2}$$

当系统处于不能工作的时刻，所有 $r(\leqslant s+1)$ 个维修设备都在进行维修工作，最早的修复时间服从参数为 $r\beta$ 的指数分布，因此

$$\text{MSDT}=(r\beta)^{-1} \tag{3}$$

为了获得 MSUT 的表达式，令 E_i 为从状态 i 到状态 $i+1$ 的平均转移时间。当系统处于故障状态 $(s+1)$ 转换到状态 s 时，只有一个元件可用，其他都处于维修状态，没有备件可用，其能保持工作状态直到下次系统故障的发生，再次进入状态 $(s+1)$。由此可知，MSUT 与 E_s 相等，下面的任务就是要得到 E_s 的表达式。由题意可知，$E_0=1/\alpha$ 表示系统的平均寿命，对于 $i=1,\cdots,s$ 可得式 (4)，其中右端第一部分表示系统在状态 i 的逗留时间，第 2 部分表示 $q_{i,i-1}$ 和额外状态转移时间的乘积(通过状态 i，从状态 $i-1$ 到状态 $i+1$)：

$$E_i=\frac{1}{a_i\alpha+b_i\beta}+\frac{b_i\beta}{a_i\alpha+b_i\beta}\left(E_{i-1}+E_i\right) \tag{4}$$

简化后得：

$$a_i\alpha E_i=1+b_i\beta E_{i-1}$$

代入 a_i 和 b_i 的值，并令 $\rho=\beta/\alpha$，可得：

$$\begin{aligned}&E_0=1/\alpha\\&E_i-(i\wedge r)\rho E_{i-1}=1/\alpha\end{aligned} \tag{5}$$

根据式 (5)，由定理 2.1 给出 E_s 的表达式。

定理 2.1　对于单装备系统拥有 $r\geqslant 1$ 个维修设备和 $s\geqslant r-1$ 个备件，其寿命和修复时间分别服从参数为 α 和 β 的指数分布，平均系统工作时间为：

$$\text{MSUT}=E_s=\alpha^{-1}\sum_{i=0}^{s}\gamma_i\rho^{s-i} \tag{6}$$

其中 $\rho=\beta/\alpha$，

$$\gamma_i=\begin{cases}r^{s-r}\,r!/i! & (i=0,1,\cdots,r-1)\\ r^{s-i} & (i=r,\cdots,s)\end{cases} \tag{7}$$

且系统的可用度为：

$$A=\frac{r\rho\sum_{i=0}^{s}\gamma_i\rho^{s-i}}{1+r\rho\sum_{i=0}^{s}\gamma_i\rho^{s-i}} \tag{8}$$

证明：将式 (5) 用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2\rho & 1 & 0 & & & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & -r\rho & 1 & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & -r\rho & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -r\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ E_r \\ E_{r+1} \\ \vdots \\ E_s \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

将左边的系数矩阵表示为$\boldsymbol{D}$，得

$$E_s = \frac{1}{\alpha}(0,0,\cdots,0,1)D^{-1}(1,1,\cdots,1,1)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=0}^{s} d^{si} \tag{10}$$

其中

$$d^{si} = (-1)^{s+i}\det(D_{is}) \big/ \det(\boldsymbol{D}) \tag{11}$$

D_{is} 为$\boldsymbol{D}$的第 i 行第 s 列的代数余子是：

$$\det(\boldsymbol{D}) = 1$$

$$\det(D_{is}) = \begin{cases} [-(i+1)\rho]\cdots[-r\rho]\times[-r\rho]^{s-r} & (i=0,1,\cdots,r-1) \\ [-r\rho]^{s-i} & (i=r,\cdots,s) \end{cases} = \gamma_i(-\rho)^{s-i}$$

因此，可得 $d^{si} = \gamma_i \rho^{s-i}$，证毕。

下面给出当 $r=1$ 和 $r=2$ 的推论。

推论 2.2　当 $r=1$ 时，有

$$E_s(r=1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\rho^{s+1}-1}{\rho-1} & \rho \ne 1 \\ \dfrac{1}{\alpha}(s+1) & \rho = 1 \end{cases} \tag{12}$$

并且可用度为

$$A(r=1) = \begin{cases} \dfrac{\rho(\rho^{s+1}-1)}{\rho^{s+2}-1} & \rho \ne 1 \\ \dfrac{s+1}{s+2} & \rho = 1 \end{cases} \tag{13}$$

当 $r=2$ 时，有

$$E_s(r=2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha}\dfrac{(2\rho)^{s+1}+(2\rho)^s-2}{2\rho-1} & \rho \ne \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2\alpha}(2s+1) & \rho = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{14}$$

并且可用度为

$$A(r=2) = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[(2\rho)^{s+1}+(2\rho)^s-2\right]}{\rho\left[(2\rho)^{s+1}+(2\rho)^s-2\right]+(2\rho-1)} & \rho \ne \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2s+1}{2s+3} & \rho = \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{15}$$

2.2　寿命服从一般分布的可用度分析

现实情况下，装备的故障不一定由电子器件引起，所以单用指数分布来描述系统寿命存一定的缺陷，将其扩展到一般分布更为合理。笔者将讨论寿命服从一般分布(概率密度函数为 f，均值为 μ)，修复时间仍为指数分布的可用度模型。

由于寿命分布缺少无记忆性的特点，只能在工作件故障和故障系统恢复到工作的时刻获得系统状态，并且记录故障件的数量。根据马尔科夫链，定义状态 i $(i=0,1,\cdots,s,s+1)$ 为有 i 个故障件正在经历或等待维修。可知，当 $t=0$ 时状态为 0，状态 $s+1$ 时系统故障，其他时刻系统处于工作状态。从下面的转移概率可知剩下的状态 $\{1,2,\cdots,s+1\}$ 是一个单一周期性的链。如前所述， $\mathrm{MSDT}=(r\beta)^{-1}$，重点是要找出 MSUT 的表达式。

接下来，笔者对任意一个特殊状态 $i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 进行研究。在 2 个观测点间的系统持续时间就是器件的寿命(所以可其密度函数可表示为 f)。令 N_i 表示当前工作件的寿命周期内修理完的故障件数量，N_i 的取值范围为 $\{0,1,\cdots,i\}$。系统从状态 i 到状态 j 的转移概率为

$$q_{i,j} = P\{N_i = i+1-j\}，\text{其中} 1 \leqslant j \leqslant i+1 \tag{16}$$

令 $Y_{k|i}(1 \leqslant k \leqslant i)$ 代表 i 个故障件中有 k 个被修复的时间，其概率密度函数 $f_{Y_{k|i}}(y)$， $y \geqslant 0$ 为

$$k\binom{i}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta y}\right)^{k-1}\beta\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{e}^{-(i-k)\beta y} \quad (1 \leqslant i \leqslant r; 1 \leqslant k \leqslant i) \tag{17}$$

$$\frac{(r\beta)^k}{\Gamma(k)} y^{k-1}\mathrm{e}^{-r\beta y} \quad (r+1 \leqslant i \leqslant s; 1 \leqslant k \leqslant i-r) \tag{18}$$

$$\frac{(r\beta)^{i-r+1}}{\Gamma(i-r)}\binom{r-1}{k-i+r-1}\mathrm{e}^{-(i-k+1)\beta y}\int_0^y z^{i-r-1}\left(\mathrm{e}^{-\beta z}-\mathrm{e}^{-\beta y}\right)^{k-i+r-1}\mathrm{d}z \quad (r+1 \leqslant i \leqslant s; i-r+1 \leqslant k \leqslant i) \tag{19}$$

其中$\dbinom{0}{0}=1$

引理 2.3　N_i 的概率密度函数表示为

$$P\{N_i = 0\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(i\wedge r)\beta x} f(x)\mathrm{d}x \tag{20}$$

当$1 \leqslant k \leqslant i$， $P\{N_i = k\}$ 表示为

$$\binom{i}{k}\int_0^\infty \left(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\right)^k \mathrm{e}^{-(i-k)\beta x} f(x)\mathrm{d}x \ (1\leqslant i\leqslant r;1\leqslant k\leqslant i) \tag{21}$$

$$\frac{(r\beta)^k}{\Gamma(k+1)}\int_0^\infty x^k \mathrm{e}^{-r\beta x} f(x)\mathrm{d}x \ (r+1\leqslant i\leq s;1\leqslant k\leqslant i-r) \tag{22}$$

$$\frac{(r\beta)^{i-r+1}}{\Gamma(i-r)}\binom{r-1}{k-i+r-1}\times \int_0^\infty\int_0^x\int_0^y z^{i-r-1}\left(\mathrm{e}^{-\beta z}-\mathrm{e}^{-\beta y}\right)^{k-i+r-1}\mathrm{d}z\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-(i-k)\beta x} f(x)\mathrm{d}x \ (r+1\leqslant i\leqslant s;i-r+1\leqslant k\leqslant i) \tag{23}$$

证明：对于 $1\leqslant i\leqslant s$，当 $k=0$，可得

$$P\{N_i=0\}=P\{X\leqslant Y_{1|i}\}=\int_0^\infty P\{Y_{1|i}\geqslant x\}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(i\wedge r)\beta x}f(x)\mathrm{d}x$$

因此，$Y_{1|i}$ 服从参数为 $(i\wedge r)\beta$ 的指数分布。

对于 $1\leqslant i\leqslant r$，当 $1\leqslant k\leqslant i-1$ 时，应用式 (17) 可得

$$\begin{aligned}P\{N_i=k\}&=P\{Y_{k|i}\leqslant X<Y_{k|i}+(Y_{k+1|i}-Y_{k|i})\}=\\&\int_0^\infty\int_0^x P\{Y_{k+1|i}-Y_{k|i}>x-y\}f_{Y_{k|i}}(y)\mathrm{d}yf(x)\mathrm{d}x=\\&\int_0^\infty\int_0^x k\binom{i}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta y}\right)^{k-1}\beta\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-(i-k)\beta x}f(x)\mathrm{d}x=\\&\binom{i}{k}\int_0^\infty\left(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\right)^k\mathrm{e}^{-(i-k)\beta x}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对于 $1\leqslant i\leqslant r$，当 $k=i$ 时，可得

$$P\{N_i=i\}=P\{Y_{i|i}\leqslant X\}=\int_0^\infty\left(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\right)^i f(x)\mathrm{d}x$$

证毕 (21)，同理，可证得式 (22)、式 (23)，此处省略。

引理 2.3 提供了计算 $q_{i,j}$ 的方法，下面所要关注的问题是预期的状态转移时间的计算。如上节所述，令 E_i 为从状态 i 到状态 $i+1$ 的平均转移时间，可得

$$E_i=\mu+q_{i,1}(E_1+\cdots+E_i)+q_{i,2}(E_2+\cdots+E_i)+\cdots+q_{i,i-1}(E_{i-1}+E_i)+q_{i,i}E_i+q_{i,i+1}\times 0 \tag{24}$$

式 (24) 的右端第一项表示工作件的平均寿命，其余项表示从状态 i 到其他状态的平均时间。

下面的目标就是要获得 E_s，将式 (24) 化简得

$$E_i=\mu+q_{i,1}E_1+(q_{i,1}+q_{i,2})E_2+\cdots+(q_{i,1}+\cdots+q_{i,i})E_i=\mu+Q_{i,1}E_1+Q_{i,2}E_2+\cdots+Q_{i,i}E_i \tag{25}$$

其中，$Q_{i,j}=\sum_{h=1}^{j}q_{i,h}$ 当 $1\leqslant j\leqslant i$。鉴于式 (16)，可得

$$Q_{i,j}=P\{i+1-j\leqslant N_i\leqslant i\}=1-P\{0\leqslant N_i\leqslant i-j\}\ (1\leqslant j\leqslant i) \tag{26}$$

表示在工作件寿命期间 i 个故障件中至少 $i+1-j$ 个被修复的概率。并且有引理 2.3 可以证明 $Q_{i,j}$。

定理 2.4　对于单装备系统拥有 $r\geqslant 1$ 个维修设备和 $s\geqslant r-1\vee 1$ 个备件，其寿命服从一般分布（概率密度为 f，均值为 μ），修复时间服从参数为 β 的指数分布，平均系统工作时间为：

$$\mathrm{MSUT}=E_s=\mu(0,\cdots,0,1)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

其中：$\boldsymbol{I}$ 表示 $s\times s$ 的单位矩阵；$\boldsymbol{Q}$ 表示 $s\times s$ 的下三角矩阵。

且可用度为

$$A=\frac{\mu(0,\cdots,0,1)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}}{\mu(0,\cdots,0,1)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}+(r\beta)^{-1}} \tag{28}$$

证明：将式 (24) 写成矩阵形式，得

$$\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\\vdots\\E_{s-1}\\E_s\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}Q_{1,1}&0&\cdots&\cdots&0\\Q_{1,2}&Q_{2,2}&&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&&\vdots\\Q_{s-1,1}&Q_{s-1,2}&\cdots&Q_{s-1,s-1}&0\\Q_{s,1}&Q_{s,2}&\cdots&Q_{s-1,s}&Q_{s,s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1\\E_2\\\vdots\\E_{s-1}\\E_s\end{pmatrix} \tag{29}$$

可得式 (27)，证毕。

下面给出当 $(r=1,s=2)$，$(r=1,s=3)$ 和 $(r=2,s=2)$ 的推论。

推论 2.5　当 $(r=1,s=2)$，$\boldsymbol{Q}$ 可化简为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]&0\\1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}(1+\beta X)\right]&1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]\end{pmatrix}$$

有

$$E_2(r=1)=\mu(0,1)(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}(1,1)^{\mathrm{T}}=\mu\frac{1-E\left[\beta X\mathrm{e}^{-\beta X}\right]}{\left(E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]\right)^2} \tag{30}$$

当 $(r=1,s=3)$，$\boldsymbol{Q}$ 可化简为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]&0&0\\1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}(1+\beta X)\right]&1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]&0\\1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\left(1+\beta X+\frac{(\beta X)^2}{2}\right)\right]&1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}(1+\beta X)\right]&1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]\end{pmatrix}$$

有

$$E_3(r=1)=\mu\frac{\left(E\left[\beta X\mathrm{e}^{-\beta X}\right]-1\right)^2-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]E\left[\left(\beta^2X^2/2\right)\mathrm{e}^{-\beta X}\right]}{\left(E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]\right)^3} \tag{31}$$

当 $(r=2,s=2)$，$\boldsymbol{Q}$可化简为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1-E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right] & 0\\ E\left[\left(1-\mathrm{e}^{-\beta X}\right)^2\right] & 1-E\left[\mathrm{e}^{-2\beta X}\right]\end{pmatrix}$$

有

$$E_2(r=2)=\mu\frac{E\left[1-\mathrm{e}^{-\beta X}+\mathrm{e}^{-2\beta X}\right]}{E\left[\mathrm{e}^{-\beta X}\right]E\left[\mathrm{e}^{-2\beta X}\right]} \tag{32}$$

3 算例分析

3.1 算例 1

假设某型导弹装备故障是由某关键的电子器件引起的，其平均寿命为 50 d，平均修复时间为 35 d (即寿命服从参数为 1/50 的指数分布，修复时间服从参数为 1/35 的指数分布)，现有保障资源由 1 个维修设备和 2 个备件组成。为了改进系统可用度，方案(a)增加 1 个维修设备，方案(b)增加 1 个备件，假设 2 种选择成本相同，哪种方案更合适？

由题意知 $\alpha=1/50$，$\beta=1/35$，$\rho=10/7$，根据定理 2.1 和推论 2.2 得

$$A(r=1,s=2)=0.864\,6$$

$$A(r=1,s=3)=0.913\,4$$

$$A(r=2,s=2)=0.957\,8$$

因此，方案(b)优于方案(a)。

3.2 算例 2

将算例 1 的寿命分布扩展到一般分布(其概率密度函数为 f)，并保持其均值为 50。修复时间仍服从参数为 1/35 的指数分布，考虑不同资源约束条件下的可用度水平，结果如表 1 所示。

表 1 不同资源约束不同寿命分布下可用度水平

寿命分布	标准差	(r,s)		
		(1,2)	(1,3)	(2,2)
Exponential(0.02)	50.0	0.864 6	0.913 4	0.957 8
Gamma(3,0.06)	28.9	0.911 8	0.953 2	0.982 6
Gamma(1/3,1/50)	86.6	0.785 5	0.834 1	0.904 6
Lognormal(3.812,0.2)	23.5	0.923 0	0.961 5	0.987 7
Lognormal(3.565,ln2)	50.0	0.880 2	0.926 0	0.969 7
Lognormal(3.212,1.4)	87.4	0.830 8	0.877 6	0.943 1
Weibull(2,π/10^4)	26.1	0.915 2	0.956 0	0.983 4
Weibull(1/2,0.2)	111.8	0.769 7	0.814 1	0.896 6

从表 1 可以看出，在不考虑成本的条件下，$(r=2,s=2)$ 的方案总是优于 $(r=1,s=3)$ 的方案，并且定理 2.1 是定理 2.4 的特例。

4 结论

在资源约束的背景下，笔者实证研究了装备系统可用度评估模型，通过分析可得到如下结论：

1) 针对装备部件不同寿命分布，综合考虑了维修设备与备件的约束，提出了与可用度建模相关的引理定义及推论，符合实际的使用维修情况，扩展了复杂装备系统可用度建模理论。

2) 示例结果表明：在相同成本条件下，增加维修设备比增加备件使系统可用度水平提高更多。

3) 资源约束条件下的可用度建模与分析方法为装备系统可用度精细化研究开辟了一条新思路，其成果有助于新研装备系统保障资源的优化配置。

参考文献：

[1] 黄奇. 两不同部件串联可修系统的可用度的一个新的计算方法[J]. 数学理论与应用, 2004, 24(2): 123-126.

[2] 张帼奋, 武洪萍. 出现保障延误时间的可修系统稳态可用度的评定[J]. 浙江大学学报, 2006, 33(3): 268-271.

[3] 沈吉锋, 张永志, 等. 基于马尔科夫更新过程的侦查系统可靠性分析[J]. 兵工自动化, 2010, 29(3): 7-10.

[4] 刘福胜, 吴纬, 单志伟. 基于马尔科夫更新过程的装甲装备使用可用度模型[J]. 装甲兵工程学院学报, 2010, 24(5): 15-17.

[5] 杨继坤, 徐廷学. 基于更新过程的导弹武器系统可用度分析[J]. 兵工自动化, 2012, 31(2): 14-16.

[6] 刘勇, 武昌, 李阳. 两级备件保障系统的装备时变可用度评估模型[J]. 兵工学报, 2010, 31(2): 253-256.

[7] 艾宝利, 武昌. 两级维修保障下 k/N 系统使用可用度模型[J]. 系统工程学报, 2011, 26(3): 421-425.

[8] 段海玲, 刘瑞元. k/N 系统在(n,r,r)维修策略下的可用度[J]. 甘肃联合大学学报, 2008, 22(5): 15-17.

[9] 陈贤, 张帼奋. 存在修理延迟的可修系统在不完全维修下的可用度[J]. 浙江大学学报, 2008, 35(1): 19-24.

[10] Sarkar J, Sarkar S. Availability of a periodically inspected system under perfect repair[J]. Statist Plann Inference, 2000, 91(4): 77-90.

[11] Liu Y B, Qiao Z, Wang G Y. Fuzzy random reliability of structures based on fuzzy random variables[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 86(4): 345-355.

[12] 杨飞, 王青, 吴振东. 资源约束条件下舰艇编队多智能体协作规划[J]. 北京航空航天大学学报, 2011, 37(2): 210-214.

[13] Machere Y, Koehn P, Sparrow D. Improving reliability and operational availability of military systems[C]\\IEEE Aerospace Conference, 2005: 3489-3957.

[14] 刘鲭洁, 陈桂明, 刘小方. BP 神经网络在导弹武器系统使用可用度预测中的应用[J]. 战术导弹技术, 2011, 30(1): 26-28.