doi: 10.7690/bgzdh.2014.02.006

兵器试验中两种产品均值比较的统计方法

尹江丽，王琳静
（装备学院基础系，北京 101416）

摘要：针对兵器试验中 2 种产品均值比较的问题，提出一种利用假设检验进行数据处理的方法。通过均值比较的不同形式建立相应的假设，根据总体方差的不同情况选取适当的统计量，并根据实测样本对所做的假设进行检验，从而判断此假设是否合理，做出最后决策。实例应用表明：该方法合理有效，不仅适用于均值比较的检验，对方差比较等均可进行检验，是兵工产品指标测定的一种有效方法。

关键词：兵器试验；均值比较；假设检验
中图分类号：TJ06　　**文献标志码：**A

Statistical Method of Two Products Average Comparison in Weapon Test

Yin Jiangli, Wang LinJing
(*Department of Fundamental Courses*, *The Academy of Equipment*, *Beijing* 101416, *China*)

Abstract: For the problem of two products average comparison in weapon test, this paper put forwards a method of processing data by hypothesis test. Corresponding hypothesis is established by the comparison of the average different forms, the appropriate statistics is selected according to the different situation of population variance, the sample is measured according to the reasonableness of the hypothesis test, and our final decision is made. The application example shows that this method is reasonable and effective. It's not only applicable to average comparison test, but also to the variance comparison test, which is an effective way to test the indexes of military products.

Keywords: weapon test; average comparison; hypothesis test

0　引言

在兵工产品试验中，如果没有给出被试品质量指标要求值的均值，就需要比较被试品与标准产品(或已知产品)的均值，从而判断被试品是否符合要求。对于这类问题，可以采用统计学中的假设检验方法进行比较，即对总体中的参数做出某种假设，选取合适的统计量，再根据资料实测样本，对所做的假设进行检验，从而判断此假设是否合理，若假设通过检验，则可以作为数据分析和应用的依据。

1　对 2 种产品均值比较的假设条件

若设 A 为被试品，B 为标准品，在兵工产品中通常视 A、B 为相互独立的 2 个正态总体，即 $X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$，$X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$，其中 μ_A、μ_B 分别表示产品 A 和 B 的均值，σ_A^2 和 σ_B^2 分别表示 A 和 B 的方差[1]。在兵工产品关于均值比较的试验中，根据产品质量的指标要求，可做出如下假设：

1) 对 2 种产品的指标进行比较，仅比较标准产品(或已知产品)中的均值 μ_B 与被试品中的均值 μ_A 是否相等，此时检验为双边假设检验，检验形式为：$H_0: \mu_A = \mu_B$，$H_1: \mu_A \neq \mu_B$；

2) 要求标准产品(或已知产品)中的均值 μ_B 是被试品中的均值 μ_A 的上限，此时检验为左边假设检验，检验形式为：$H_0: \mu_A \geqslant \mu_B$，$H_1: \mu_A < \mu_B$；

3) 要求标准产品(或已知产品)中的均值 μ_B 是被试品中均值 μ_A 的下限，此时检验为右边假设检验，检验形式为：$H_0: \mu_A \leqslant \mu_B$，$H_1: \mu_A > \mu_B$。

2　对 2 种产品均值比较的假设检验方法

根据假设检验的方法[2]，首先在总体 $X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$，$X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ 中分别抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_A}$ 和 $X_1', X_2', \cdots, X_{n_B}'$，其中 n_A 和 n_B 分别为样本容量，$\bar{X}_A$、$\bar{X}_B$ 和 ${S_A}^2$、${S_B}^2$ 分别为 2 个总体的样本均值和样本方差。笔者根据总体方差的不同情况，给出上述 3 种形式假设的检验方法。

2.1　总体方差 σ_A^2 和 σ_B^2 已知的情况

若总体方差 σ_A^2 和 σ_B^2 已知，由数理统计的相关理论可知[3]，此时为正态性检验。

具体方法：在 H_0 为真下选取检验的统计量为 $Z = (\bar{X}_A - \bar{X}_B) \Big/ \sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A} + \dfrac{\sigma_B^2}{n_B}} \sim N(0,1)$，对给定的显著性水平

收稿日期：2013-09-18；修回日期：2013-10-21
作者简介：尹江丽(1970—)，女，河北人，硕士，副教授，从事应用数学、系统工程研究。

α，对于前述 3 种类型的假设得到的拒绝域分别为：

1) 双边检验：$|Z|>Z_{\alpha/2}$；

2) 左边检验：$Z<-Z_{\alpha}$；

3) 右边检验：$Z>Z_{\alpha}$。

由样本观测值可以计算出不等式左端统计量 $Z=(\bar{X}_A-\bar{X}_B)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}$ 的观测值，不等式的右端是选定信度的临界值，其中 Z_{α} 为正态分布的 α 分位数，可以查表得到，通过比较统计量是否属于拒绝域而做出决策是接受 H_0 还是拒绝 H_0。

例如，从 2 批彼此无关的发射管中各取 10 发，由试验测得 A、B 2 个发射管初速的样本值见表 1，根据经验，发射管的初速服从正态分布，设为 $X_A\sim N(\mu_A,\sigma_A^2)$，$X_B\sim N(\mu_B,\sigma_B^2)$，且已知各自的方差分别为：$\sigma_A^2=4.5$，$\sigma_B^2=4.0$，为了验证在显著性水平 $\alpha=0.05$ 的要求下，A 发射管的初速与 B 发射管的初速是否不同，笔者做出如下分析：

表 1　A、B 2 个发射管初速的样本值

序号	发射管初速 v_i/(m·s^{-1})	
	发射管 A	发射管 B
1	830.6	825.5
2	830.8	826.5
3	833.9	828.1
4	833.6	829.0
5	833.7	828.9
6	834.0	830.0
7	834.2	833.6
8	834.3	833.0
9	836.0	834.5
10	837.2	834.1

1) 检验假设：H_0: $\mu_A=\mu_B$，H_1: $\mu_A\neq\mu_B$；

2) 由于 σ_A^2、σ_B^2 已知，故在 H_0 为真时选取 Z 作为检验的统计量；

3) 对于给定的显著性水平 α，由于是双边检验，拒绝域为 $|Z|>Z_{\alpha/2}$；

4) 由样本计算出 $\bar{x}_A=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=833.8$，$\bar{x}_B=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=830.3$，$Z=(\bar{X}_A-\bar{X}_B)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}=3.796$，查表可知 $Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}=1.96$，显然落入拒绝域，拒绝 H_0，认为 2 个发射管的初速不同。

2.2　总体方差 σ_A^2 和 σ_B^2 未知但相等的情况

若总体方差 σ_A^2 和 σ_B^2 已知，由数理统计的相关理论可知[4]，此时为 T 检验。

具体方法如下：

在 H_0 为真下选取检验的统计量

$$T=\frac{\bar{X}_A-\bar{X}_B}{\sqrt{\frac{(n_A-1)S_A^2+(n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2}}\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}}\sim t(n_A+n_B-2)$$

对于给定的显著性水平 α，对于前述 3 种类型的假设得到的拒绝域分别为：

1) 双边检验：$|T|>t_{\alpha/2}(n_A+n_B-2)$；

2) 左边检验：$T<-t_{\alpha}(n_A+n_B-2)$；

3) 右边检验：$T>t_{\alpha}(n_A+n_B-2)$。

其中 t_{α} 为 T 分布的 α 分位数，有相应的表可查。同样，通过比较统计量是否属于拒绝域而决定是接受 H_0 还是拒绝 H_0。

2.3　总体方差 σ_A^2 和 σ_B^2 未知但不等的情况

2.3.1　大样本情况

一般当 $\min\{n_1,n_2\}\geqslant 30$ 时为大样本情况。样本容量越大，越接近于真实值，故在样本容量大的前提下，样本方差可近似代替总体方差，这时相当于方差已知。此时在 H_0 为真下选取 $U=(\bar{X}_A-\bar{X}_B)\Big/\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)$ 作为检验的统计量，是正态性检验，具体检验方法同 2.1。

2.3.2　小样本情况

一般当 $\max\{n_1,n_2\}<30$ 时为小样本情况。此时在 H_0 为真下还是选取 $U=(\bar{X}_A-\bar{X}_B)\Big/\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}$ 作为检验的统计量，但是在小样本的前提下，U 的近似分布已不再是标准的正态分布，而是 T 分布

$$U=\frac{\bar{X}_A-\bar{X}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}}\sim t(\nu)$$

关于自由度 ν 的选取有很多种方法，在兵器试验中一般采用等效法给出自由度 ν 的取值，具体为由样本值计算 $\nu'=\frac{\left[(S_A^2/n_A)+(S_B^2/n_B)\right]^2}{\frac{(S_A^2/n_A)^2}{n_A+1}+\frac{(S_B^2/n_B)^2}{n_B+1}}-2$，用四舍五入的方法对 ν' 取整为自由度 ν 的取值[1]。

对于给定的显著性水平 α，对于前述 3 种类型的假设得到的拒绝域分别为：

1) 双边检验：$|U|>t_{\alpha/2}(\nu)$；

2) 左边检验：$U<-t_{\alpha}(v)$；

3) 右边检验：$U>t_{\alpha}(v)$。

最后根据统计量是否属于拒绝域而做出决策。

例如有 A、B 2 种弹丸，A 弹丸是 B 弹丸的改进型产品，要求 A 弹丸的射程不得低于 B 弹丸，用同一门炮对 A、B 2 种弹丸进行射击试验，得落点射程的样本值如表 2。根据经验，弹丸的射程服从正态分布，设为 $X_{\mathrm{A}} \sim N\left(\mu_{\mathrm{A}}, \sigma_{\mathrm{A}}{}^{2}\right)$，$X_{\mathrm{B}} \sim N\left(\mu_{\mathrm{B}}, \sigma_{\mathrm{B}}{}^{2}\right)$，在显著性水平 $\alpha=0.1$ 下为了验证 A 弹丸的射程是否满足要求，笔者做出如下分析。

表 2　A、B 2 种弹丸的射程样本值

序号	弹丸射程/m	
	弹丸 A	弹丸 B
1	17 112	17 014
2	17 105	17 020
3	17 086	17 032
4	17 102	17 020
5	17 014	17 058
6	17 163	17 014
7	17 098	17 024
8	17 123	16 994
9	17 157	16 969
10	17 017	16 964

检验者的目的是检验改进后的弹丸射程是否大于改进前的，由假设检验的实际意义可知 $\mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$ 作为备择假设比较合理[2]。

1) 提出假设：$\mathrm{H}_0: \mu_{\mathrm{A}} \leqslant \mu_{\mathrm{B}}$，$\mathrm{H}_1: \mu_{\mathrm{A}}>\mu_{\mathrm{B}}$。

2) 由于 σ_{A}^2、σ_{B}^2 未知且不相等，并且样本容量为 10，是小样本，故在 H_0 为真下，选取 U 作为检验的统计量。

3) 对于给定的显著性水平 α，由于是右边检验，拒绝域为 $U>t_{\alpha}(v)$。

4) 由样本计算出：

$$\bar{x}_{\mathrm{A}}=\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i=17\,091 \qquad \bar{x}_{\mathrm{B}}=\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i=17\,011$$

$$S_{\mathrm{A}}{}^{2}=\frac{1}{n_{\mathrm{A}}-1} \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{A}}}\left(x_i-\bar{x}_{\mathrm{A}}\right)^2=2\,862.3$$

$$S_{\mathrm{B}}{}^{2}=\frac{1}{n_{\mathrm{B}}-1} \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{B}}}\left(x_i-\bar{x}_{\mathrm{B}}\right)^2=806.6$$

$$U=\frac{\bar{X}_{\mathrm{A}}-\bar{X}_{\mathrm{B}}}{\sqrt{\frac{S_{\mathrm{A}}^2}{n_{\mathrm{A}}}+\frac{S_{\mathrm{B}}^2}{n_{\mathrm{B}}}}}=4.1661$$

$$v'=\frac{\left[\left(S_{\mathrm{A}}{}^{2} / n_{\mathrm{A}}\right)+\left(S_{\mathrm{B}}{}^{2} / n_{\mathrm{B}}\right)\right]^2}{\frac{\left(S_{\mathrm{A}}{}^{2} / n_{\mathrm{A}}\right)^2}{n_{\mathrm{A}}+1}+\frac{\left(S_{\mathrm{B}}{}^{2} / n_{\mathrm{B}}\right)^2}{n_{\mathrm{B}}+1}}-2 \approx 14.7$$

取整得 v=15，查 T 分布表可知 $t_{0.1}(15)$=1.340 6，显然 $U>t_{0.1}(15)$，落入拒绝域，拒绝 H_0，认为改进后的 A 弹丸射程增大，满足指标要求。

2.4　成对观察值的情况(此时 $\sigma_{\mathrm{A}}^2 \neq \sigma_{\mathrm{B}}^2$ 未知)

成对观察值的情况强调的是在相同条件下对 2 种产品轮流交替作交叉对比试验，因此要求 2 个样本的容量一定相同，这样得到的试验结果是成对的观察值。这种配对的比较法可以突出 2 种性能之间的差异，而将其他各种因素的影响降低到最低程度，成对观察值是 $\sigma_{\mathrm{A}}^2 \neq \sigma_{\mathrm{B}}^2$ 未知时对均值比较的一种非常理想的方法[5]。笔者就双边检验给出成对观察值的基本方法：

1) 提出假设：$\mathrm{H}_0: \mu_{\mathrm{A}}=\mu_{\mathrm{B}}$；$\mathrm{H}_1: \mu_{\mathrm{A}} \neq \mu_{\mathrm{B}}$；

等价形式：H_0：$\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}}=0$；$\mathrm{H}_1$：$\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}} \neq 0$。

2) 设 $\left(X_1, Y_1\right),\left(X_2, Y_2\right), \cdots,\left(X_n, Y_n\right)$ 为 n 对相互独立的试验结果，令 $Z=X-Y, Z_i=X_i-Y_i(i=1,2, \cdots, n)$ 由正态分布的性质可知 $Z \sim N\left(\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}}, \sigma_{\mathrm{A}}{}^{2}+\sigma_{\mathrm{B}}{}^{2}\right)$，则 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 为总体 Z 的样本，$\bar{Z}$ 和 $S_Z{}^2$ 分别为样本均值和方差。这时 2 个正态总体的假设检验问题就转化成了 1 个正态总体的情况。

3) 在 H_0 为真下选 $t=\bar{Z} /\left(S_Z / \sqrt{n}\right) \sim t(n-1)$ 作为检验的统计量，对于给定的显著性水平 α，拒绝域为 $|t| \geqslant t_{\alpha / 2}(n-1)$，最后根据统计量的实测值是否在拒绝域内而做出决策。

例如　甲乙 2 种弹，进行单发交叉射程对比试验，得射程的样本值如表 3，根据经验，弹的射程服从正态分布，设为 $X_{\mathrm{A}} \sim N\left(\mu_{\mathrm{A}}, \sigma_{\mathrm{A}}{}^{2}\right)$，$X_{\mathrm{B}} \sim N\left(\mu_{\mathrm{B}}, \sigma_{\mathrm{B}}{}^{2}\right)$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，为了判断 2 种弹的射程是否一致，笔者做出如下分析。

表 3　甲、乙 2 种弹的射程样本值

序号	弹丸射程/m	
	弹丸甲	弹丸乙
1	10 050	9 810
2	9 911	9 900
3	10 044	9 850
4	9 957	9 904
5	9 929	9 916
6	9 970	9 863
7	10 020	9 861
8	10 069	9 909

1) 提出假设：H_0：$\mu_{\mathrm{A}}=\mu_{\mathrm{B}}$；$\mathrm{H}_1$：$\mu_{\mathrm{A}} \neq \mu_{\mathrm{B}}$；

2) 设 $Z=X-Y$，$Z_i=X_i-Y_i(i=1,2, \cdots, n)$，得 Z 的样本值如表 4。

(下转第 29 页)