

doi: 10.7690/bgzdh.2014.07.004

# 一类具有周期脉冲的非线性军备竞赛博弈的动力学研究

张志攀, 阳平华

(军械工程学院基础部, 石家庄 050003)

**摘要:** 针对目前萨珀斯坦模型在设计上存在的不足, 对一方受到周期性干扰情况下军备竞赛的稳定性进行研究。将自我约束变量引入萨珀斯坦模型中, 研究其对博弈的影响, 分析动力学方程平衡点的稳定性, 并在此基础上引入周期脉冲函数, 运用 Floquet 理论构造二维离散动力学方程的 Poincaré 映射, 并求出周期解的 Floquet 乘子。结果表明: 改进后的模型的计算结果与 Matlab 仿真图形吻合, 能为进一步深入理解军备竞赛的作用机制提供借鉴。

**关键词:** 军备竞赛; 萨珀斯坦模型; 周期脉冲; Floquet 理论

**中图分类号:** TJ03 **文献标志码:** A

## Research on Dynamics of a Nonlinear Arms Race Game Under Periodic Pulse

Zhang Zhipan, Yang Pinghua

(Department of Basic Courses, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China)

**Abstract:** In allusion to the problem that Saperstein model have deficiencies in the model design, studied the stability of arms race while one part is periodic interfered. Considering a self-restricting variable Saperstein model and then studying the effects of the self-restricting variable, we analyze the stability of equilibrium points of dynamics equations. On the basis of the analysis, considering a periodic pulse functions Saperstein model, we construct the Poincaré map of two dimension discrete dynamics equations, and calculate Floquet multipliers of periodic solutions. The result shows that the improved model's calculation results agree with Matlab simulation graphics, and it can provides reference to further understand the arms race functional mechanism.

**Keywords:** arms race; Saperstein model; periodic pulse; Floquet theory

### 0 引言

多年来, 军备竞赛研究一直受到广泛关注。理查森军备竞赛模型作为一类经典的线性动力学模型, 较好地反映了国家之间军备竞赛博弈的相互关系, 但由于该模型关系比较简单, 而现实世界大多都是非线性的, 无法进行公式化表述, 即模型的运用存在局限性。1984年, 美国学者萨珀斯坦(A.M.Saperstein)通过对历史数据的研究比较, 对理查森军备竞赛模型进行了改进, 建立了非线性的萨珀斯坦模型, 并于1984年将其研究成果发表在《Nature》<sup>[1]</sup>中, 受到各国军方和相关研究学者的广泛关注。国内许多学者在这方面做了大量的研究, 取得了丰硕的成果<sup>[2-3]</sup>。

萨珀斯坦模型虽然成功地将军备竞赛研究从线性模型发展到了非线性模型, 但是与现实国家间的军备竞赛相比, 模型依然比较简单, 没有考虑己方当年军费比率对下一年军费比率变化的影响<sup>[4]</sup>, 同时, 在军备竞赛中, 决策者的认识可能发生非理性的变化, 这种变化可能对军备竞赛的稳定性和可预见性造成影响。笔者针对萨珀斯坦模型设计上的缺

陷, 考虑己方当年军费比率对下一年军费变化的影响, 并研究了一方受到周期性干扰情况下军备竞赛的稳定性, 通过计算机数据模拟验证结论的正确性。

### 1 萨珀斯坦模型介绍

萨珀斯坦认为, 处于军备竞赛中的 2 个国家, 本国下一年的军费开支比率与另一国当年的军费开支比率成正比。同时, 如果另一国在当年把所有的预算都用于军费开支, 则本国在下一年也不会增加军费。设 2 个国家的军费开支比率分别用  $x_n$ ,  $y_n$  表示, 且  $0 < x_n < 1$ ,  $0 < y_n < 1$ , 萨珀斯坦模型表述为:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4ay_n(1 - y_n) \\ y_{n+1} = 4bx_n(1 - x_n) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ 。

国家的军费变化情况与系数  $a$ 、 $b$  的取值有直接的关系。设  $a = b \in [0, 1]$ , 图 1、图 2 表示的是当 2 个国家军费比率初值分别为  $x_1 = 0.1$ ,  $y_1 = 0.2$  时, 两国军费比率的变化情况。如图 1 所示, 当  $0 < a < 0.834$  时,  $x_n$  未发生倍周期分岔, 说明此时

收稿日期: 2014-02-14; 修回日期: 2014-03-17

作者简介: 张志攀(1984—), 男, 四川人, 在读硕士, 从事博弈论及其军事运用研究。

国家  $x$  的军费比率是可以预见的；当  $0.834 \leq a < 0.862$  时， $x_n$  发生 2 倍周期分岔，当  $a \geq 0.862$  时， $x_n$  发生 4 倍周期分岔并通向混沌，说明在  $a \geq 0.834$  后，国家  $x$  的军费比率无法准确预测，图 2 中也可以得到类似的国家  $y$  的军费比率变化情况。此时国家  $x$ 、 $y$  在无法准确判断对方军费比率的情况，极易造成决策失误，并可能由此引发战争。萨珀斯坦通过分析二战时期前期德国与苏联、法国与德国、意大利与苏联的军备竞赛数据，对模型进行了验证，并得到了与模型吻合的结论。

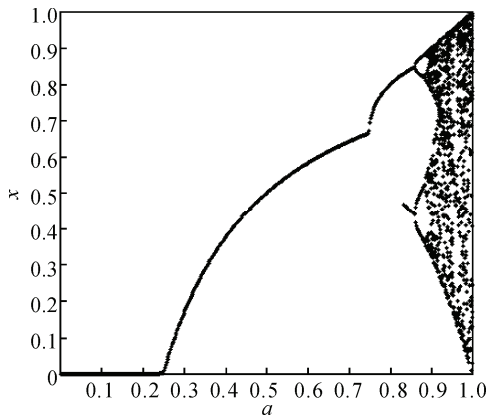


图 1 当  $x_1=0.1, y_1=0.2$  时， $x$  随  $a$  的不同取值而发生分岔的情况

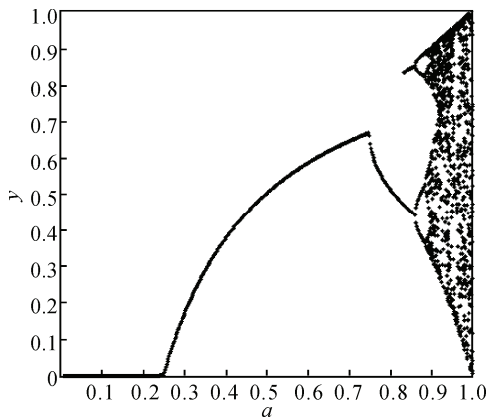


图 2 当  $x_1=0.1, y_1=0.2$  时， $y$  随  $a$  的不同取值而发生分岔的情况

## 2 具有周期脉冲的军备竞赛模型分析

如果己方当年军费开支比例较大，则转化为军备、科研等国防工业的固定投资对下一年的影响也很大，下一年的军费必须考虑保持军备战备水平的维持性投入，因此下一年己方军费比率应在当年军费基础上增加，设反馈因子为  $u$ ，激励因子  $a = b = g$ ，则新的军备竞赛模型为：

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4gy_n(1-y_n) + ux_n \\ y_{n+1} = 4gx_n(1-x_n) + uy_n \end{cases} \quad (2)$$

其中  $0 < g < 1$ ， $0 < u < 1$ 。国家决策者的思维模型在长期的对抗中并不是完全理性的，其在某些时期会因为经济发展水平、政治环境、国际舆论等多方面因素而采用不同的决策，而这些因素往往具有周期性波动的特性，为此，笔者假设在军备竞赛的对抗过程中，决策者的非理性思维也具有周期性波动。下面笔者主要从 2 个方面来研究收到周期干扰的决策对军备竞赛的影响。

### 2.1 没有周期脉冲的军备竞赛

首先求出式 (2) 的平衡点，令  $x_n = x_{n+1} = x$ ， $y_n = y_{n+1} = y$ ，代入式 (2) 得：

$$\begin{cases} x = 4gy(1-y) + ux \\ y = 4gx(1-x) + uy \end{cases} \quad (3)$$

利用代入消元法将式 (3) 化为：

$$64g^3x^4 - 128g^3x^3 + [16g^2(1-u) + 64g^3]x^2 + [(u-1)^3 - 16g^2(1-u)]x = 0 \quad (4)$$

显然， $x=0$  是方程的其中 1 个根，将式 (4) 化为：

$$64g^3x^3 - 128g^3x^2 + [16g^2(1-u) + 64g^3]x + (u-1)^3 - 16g^2(1-u) = 0 \quad (5)$$

由盛金公式<sup>[5]</sup>求解方程 (5) 的根，并代入式 (3) 求得平衡点为：

$$\begin{aligned} E_1 &= (0, 0) \\ E_2 &= \left( \frac{4g+u-1}{4g}, \frac{4g+u-1}{4g} \right) \\ E_3 &= \left( \frac{4g-u+1+\sqrt{\Delta}}{8g}, \frac{4g-u+1-\sqrt{\Delta}}{8g} \right) \\ E_4 &= \left( \frac{4g-u+1-\sqrt{\Delta}}{8g}, \frac{4g-u+1+\sqrt{\Delta}}{8g} \right) \end{aligned}$$

其中  $\Delta = 16g^2 - 3(u-1)^2 + 8g(u-1) > 0$ 。

在平衡点  $E_i(x_i, y_i)$  处，系统 (2) 的 Jacobi 矩阵<sup>[6]</sup>为：

$$J = \begin{bmatrix} u & 4g-8gy_i \\ 4g-8gx_i & u \end{bmatrix}$$

其特征方程为：

$$f(\lambda) = |\lambda E - J| = (\lambda - u)^2 - 16g^2(2y_i - 1)(2x_i - 1) = 0 \quad (6)$$

下面对非线性离散动力系统的一般分岔的判定作一个介绍<sup>[7-8]</sup>。

对于  $n$  阶空间，其中状态变量  $x_{k+1} = f_g(x_k)$ ， $x_{k+1}, x_k \in R^n$ ， $k$  是迭代指数，分岔参数  $g \in R$ ，假设函数  $f_g$  存在不动点  $x_0$  并满足以下条件：

1) Jacobi 矩阵  $D_{xk} f_g(x_0)$  有一对共轭特征值  $\lambda_1(g)$  和  $\bar{\lambda}_1(g)$ ，且在  $g_0$  满足  $|\lambda_1(g_0)| = 1$ ，其余特征值  $\lambda_j(g)$ ， $j = 3, \dots, n$ ，在该点满足  $|\lambda_j(g_0)| < 1$ ；

2) 横截条件  $\frac{d|\lambda_1(g_0)|}{dg} \neq 0$ ；

3) 非简谐振动  $\lambda_1^m(g_0) \neq 1$  或简谐振动  $\lambda_1^m(g_0) = 1$ ， $m = 3, 4, 5$ 。

如果满足以上 3 个条件，则 Hopf 发生在  $g = g_0$ ，分岔的类型和稳定性取决于条件 3 和函数  $f_g$  的非线性特性<sup>[9]</sup>。

将平衡点  $E_1(x_1, y_1)$  代入特征方程 (6)，得特征值  $\lambda_1 = 4g + u$ ， $\lambda_2 = -4g + u$ 。为使  $|\lambda_i| < 1$ ，则须  $0 < g < \frac{1-u}{4}$ 。当  $u = 0.1$  时，有  $0 < g < 0.225$ 。如图 3、图 4，系统 (2) 在平衡点  $(0, 0)$  处是稳定的。当  $g = \frac{1-u}{4}$  时，系统稳定性改变，但此时  $\lambda_2 \neq -1$ ，不存在一对共轭特征值满足条件 1)，故没有发生 Hopf 分岔现象。

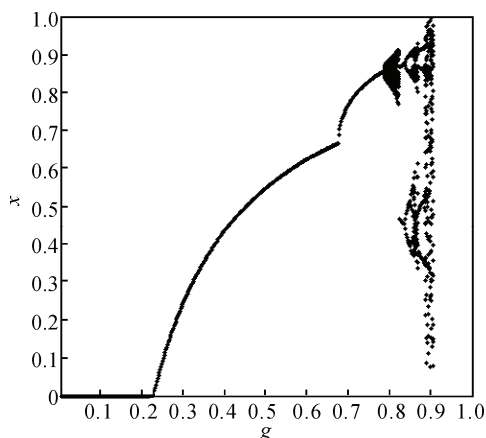


图 3 当  $x_1=0.1, y_1=0.2, u=0.1$  时， $x$  随  $g$  的不同取值而发生分岔的情况

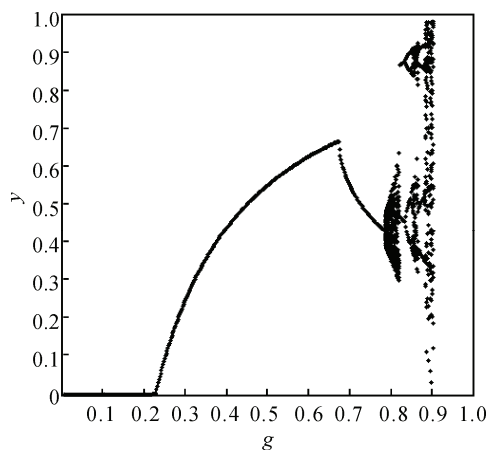


图 4 当  $x_1=0.1, y_1=0.2, u=0.1$  时， $y$  随  $g$  的不同取值而发生分岔的情况

将  $E_2(x_2, y_2)$  代入特征方程 (6)，得特征值  $\lambda_1 = 4g + 3u - 2$ ， $\lambda_2 = -4g - u + 2$ ，其共同的取值范围为  $\frac{1-u}{4} < g < \frac{3(1-u)}{4}$ ，当  $u = 0.1$  时， $0.225 < g < 0.675$ ，如图 3、图 4 所示，系统 (2) 在平衡点  $\left(\frac{4g+u-1}{4g}, \frac{4g+u-1}{4g}\right)$  处是稳定的。当  $g = \frac{3(1-u)}{4}$  时，系统稳定性改变，但此时  $\lambda_2 \neq -1$ ，不存在一对共轭特征值满足条件 1)，故没有发生 Hopf 分岔现象。

将  $E_3(x_3, y_3)$  代入特征方程 (6)，则特征值  $\lambda_1 = u + \sqrt{(u-1)^2 - \Delta}$ ， $\lambda_2 = u - \sqrt{(u-1)^2 - \Delta}$ ，且  $\Delta = 16g^2 - 3(u-1)^2 + 8g(u-1) > 0$ ， $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ ，则  $\frac{3(1-u)}{4} < g < \frac{(1-u) + \sqrt{4(1-u)^2 + 2(1-u)}}{4}$ ，当  $u = 0.1$  时， $0.675 < g < 0.786$ ，如图 2 所示，系统 (2) 在平衡点  $\left(\frac{4g-u+1+\sqrt{\Delta}}{8g}, \frac{4g-u+1-\sqrt{\Delta}}{8g}\right)$  处是稳定的。当  $g = \frac{(1-u) + \sqrt{4(1-u)^2 + 2(1-u)}}{4}$  时，系统稳定性改变，系统 (2) 满足条件 1)、2)、3)，故发生 Hopf 分岔。将  $E_4(x_4, y_4)$  代入特征方程 (6)，得到与的结论同上。

### 2.2 具有周期脉冲的军备竞赛

设模型 (2) 中，国家  $x$  的决策过程受到外在因素的脉冲干扰，并且这种脉冲干扰会随时间周期性地作用于决策过程中。设脉冲函数为  $h(x_n)$ ，当  $n = m\tau$  时，国家  $x$  下一年的军费比率等于当年军费

比率加上脉冲函数  $h(x_n)$ ，则式 (2) 将改写成以下形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 4gy_n(1-y_n) + ux_n \\ y_{n+1} = 4gx_n(1-x_n) + uy_n \end{array} \right\} \quad n \neq m\tau \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + h(x_n) \\ y_{n+1} = 4gx_n(1-x_n) + uy_n \end{array} \right\} \quad n = m\tau$$

其中  $m, \tau \in N, \tau = 1, 2, \dots, +\infty$ 。

在  $n \neq m\tau$  时期，系统 (7) 中军备竞赛的双方均为理性决策者，他们的决策具有一致性。在  $n = m\tau$  时期，系统 (7) 中国家  $x$  决策发生了改变。为了直观看出在周期性脉冲情况下周期解的情况，笔者采用 Matlab 对系统 (7) 进行数值模拟。

为了验证上述模拟的正确性，需要用到 Floquet 理论<sup>[10]</sup>。

Floquet 理论是研究非线性方程周期解稳定性的主要方法之一，当所有 Floquet 乘子都在复平面的单位圆内，则周期解是稳定的；如果其中有 1 个 Floquet 乘子在复平面的单位圆上，则周期解是临界稳定的；如果有 1 个或 1 个以上的 Floquet 乘子通过 -1 穿出复平面的单位圆，则周期解产生倍周期分岔；如果有 1 个或 1 个以上的 Floquet 乘子通过 1 穿出复平面的单位圆，则周期解产生鞍结分岔；如果 1 对共轭复 Floquet 乘子穿出复平面的单位圆，则产生 Hopf 分岔<sup>[11]</sup>。

在系统 (7) 中，即考察由  $x_{m+1}, x_{2m+1}, \dots, x_{\tau m+1}$  组成的周期解的稳定性。由于系统 (7) 是离散的，求解 Floquet 乘子关键是找出周期初到周期末的映射关系，即 Poincaré 映射，Floquet 乘子的计算过程实际是求解系统(7)的 Jacobi 矩阵的特征值，特征值中模的最大值即为该映射的 Floquet 乘子。设系统 (7)  $x_1, y_1$  经过  $m$  次迭代求得的  $x_{1+m}, y_{1+m}$ ，此时称  $x_{1+m}, y_{1+m}$  为系统 (7) 在初值为  $x_1, y_1$  时的 1 周期解，再将  $x_{1+m}, y_{1+m}$  经过  $m$  次迭代求得的  $x_{1+2m}, y_{1+2m}$ ，此时称  $x_{1+2m}, y_{1+2m}$  为系统 (7) 在初值为  $x_1, y_1$  时的 2 周期解，……依次类推，可求得  $\tau$  周期解。则系统 (7) 的 Jacobi 矩阵表示为：

$$J = \begin{bmatrix} 1 + \frac{dh(x)}{dx} \Big|_{x=x_m} & 0 \\ 4g - 8gx_m & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 4g - 8gy_{m-1} \\ 4g - 8gx_{m-1} & u \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} u & 4g - 8gy_1 \\ 4g - 8gx_{m-2} & u \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} u & 4g - 8gy_1 \\ 4g - 8gx_1 & u \end{bmatrix}$$

取  $m = 3$ ， $h(x)$  为常数 0.1， $u = 0.1$ ，当  $x_1 = x_{m+1} = x, y_1 = y_{m+1} = y$  时，求得系统 (7) 的平衡点代入上述矩阵，则化为：

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

其中

$$a = (4g - 8g(y/10 - 4gx(x-1)))(4g - 8gx) + 0.01$$

$$b = (4g)/5 - (4g(y/10 - 4gx(x-1)))/5 - (4gy)/5$$

$$c = (2g)/25 - (2g(x/10 - 4gy(y-1)))/25 + (4g - 8gx)(4g - 8gx)((4g - 8g(x/10 - 4gx(x-1)))(4g - 8g(x/100 - (2gy(y-1))/5 + 4g(y/10 - 4gx(x-1))(4gx(x-1) - y/10 + 1))) + 0.01) - (2gy(y-1))/5 + (4g(y/10 - 4gx(x-1))(4gx(x-1) - y/10 + 1)))/25$$

$$d = 4g - 8g(y/10 - 4gx(x-1))(4g - 8g(x/100 - (2gy(y-1))/5 + 4g(y/10 - 4gx(x-1))(4gx(x-1) - y/10 + 1))))/10 - (4g - 8gy)((4g(x/10 - 4gy(y-1))/5 - (4g)/5 + (4g(x/100 - (2gy(y-1))/5 + (4g(y/10 - 4gx(x-1))(4gx(x-1) - y/10 + 1)))/5) + 0.001$$

计算矩阵  $J$  的特征值，并取其模最大那个特征值为结果，经数值模拟，当  $0 < g < 0.695$  时，所有 Floquet 乘子均在单位圆内，说明系统 (7) 的周期解是稳定的；当  $g = 0.695$  时，Floquet 乘子通过 -1 穿出复平面的单位圆，发生倍周期分岔而失去稳定性，如图 5；当  $g = 0.778$  时，Floquet 乘子通过 1 穿出复平面的单位圆，发生鞍结分岔而失去稳定性，如图 6。模拟结果与图 7、图 8 一致。

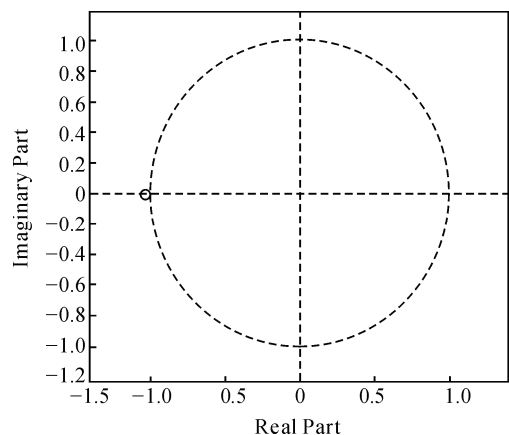


图 5 当  $g = 0.695$  时的 Floquet 乘子

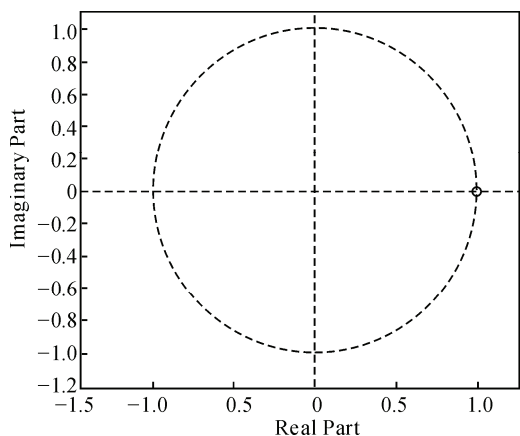


图 6 当  $g=0.778$  时的 Floquet 乘子

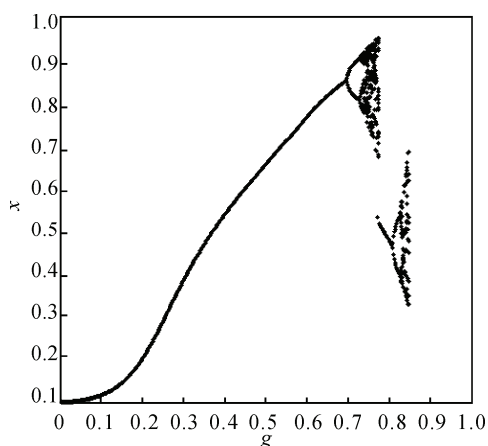


图 7 当  $x_1=0.1, y_1=0.2, u=0.1, m=3$  时,  $x$  随  $g$  的不同取值而发生分岔的情况

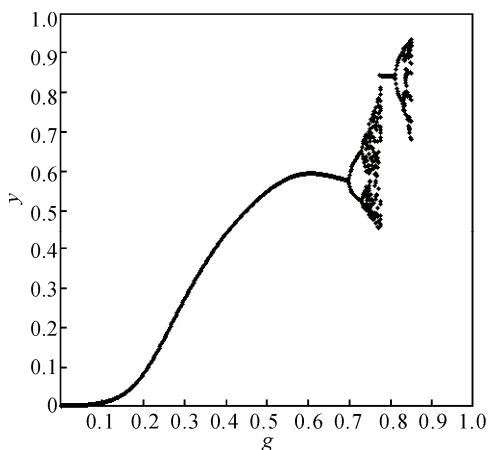


图 8 当  $x_1=0.1, y_1=0.2, u=0.1, m=3$  时,  $y$  随  $g$  的不同取值而发生分岔的情况

### 3 结论

笔者引入自身当年军费对下一年军费变化的约束条件以及周期扰动函数, 构造博弈动力学方程的 Poincaré 映射, 计算结果较好地模拟了军备竞赛的环境条件, 军备竞赛双方的稳定阶段均可以通过求解 Floquet 乘子进行判断。通过比较 2 种条件下的军备竞赛可以看出: 不具有周期脉冲的军备竞赛, 分岔系数  $a \in [0, 0.834]$ ; 而具有周期脉冲的军备竞赛, 稳定系数  $g \in [0, 0.695]$ , 说明军备竞赛在受到周期脉冲干扰的情况下稳定区域比不受周期脉冲干扰的稳定区域缩小, 军备竞赛更容易产生不稳定而失控。作为对经典萨珀斯坦模型的改进, 该研究丰富了军备竞赛模型的研究, 为下一步更深入探索军备竞赛的作用机制提供了借鉴。

### 参考文献:

- [1] Saperstern. A. M. Chaos-a model for the outbreak of war[J]. Nature, 1984, 309: 303-305.
- [2] 惠一楠, 朱华勇, 沈林成. 无人机攻防对抗不完全信息动态博弈方法研究[J]. 兵工自动化, 2009, 28(1): 4-7.
- [3] 王天虹, 宋业新. 随机矩阵对策及其在舰艇作战方案中的应用[J]. 兵工自动化, 2010, 29(6): 22-24.
- [4] 张立洪. 军备竞赛的混沌动力学模型[J]. 自然杂志, 1996, 18(2): 88-92.
- [5] 范盛金. 一元三次方程的新求根公式与新判别法[J]. 海南师范学院学报: 自然科学版, 1989, 2(2): 91-98.
- [6] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2010: 32-34.
- [7] 李恩颖, 李光耀, 文桂林. Hopf 分岔代数判据在红细胞存活模型中的应用[J]. 工程数学学报, 2008, 25(4): 576-581.
- [8] Wen Guilin. Criterion to identify Hopf bifurcation in maps of arbitrary dimension[J]. Physical Review E, 2005, 72(2): 026201-4.
- [9] 钱尧一, 侯亮, 林文广, 等. 三角履带诱导轮动力学建模与脱轮仿真[J]. 机电工程, 2013, 30(2): 134-137.
- [10] 傅希林. 脉冲微分系统引论[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 77-85.
- [11] Wang P G, Wu H X. Criteria on boundedness in terms of two measures for discrete systems[J]. Appl Math Letts, 2008, 21(12): 1221-1228.