

doi: 10.7690/bgzd.2015.10.008

# 基于决策者风险态度的模糊数排序新方法

张京亮<sup>1</sup>, 陈之宁<sup>2</sup>

(1. 陆军航空兵学院基础部基础教研室, 北京 101123; 2. 陆军军官学院基础部数学教研室, 合肥 230031)

**摘要:** 针对现有的模糊数比较与排序方法没有考虑或者不满足决策者风险偏好的不足, 构造一种基于质心兼顾模糊熵以及风险态度的模糊数综合排序新指标。在考虑决策者的风险态度来定义表征决策者风险态度的相对分离度指标的基础上, 基于相对分离度和质心, 融合模糊数的熵信息, 构造新的模糊数综合排序指标, 同时对现有散度指标用于模糊数排序方法进行深入分析并指出其不足。分析结果证明了排序新指标的合理性, 与已有的排序方法比较, 文中排序方法更具优越性。

**关键词:** 模糊数; 风险态度; 相对分离度; 模糊熵; 质心

**中图分类号:** TP301.6 **文献标志码:** A

## New Method for Ranking Fuzzy Numbers Based on Decision Risk Attitudes

Zhang Jingliang<sup>1</sup>, Chen Zhining<sup>2</sup>

(1. Staff Room of Basic, Department of Basic Theories, Army Air Force Academy, Beijing 101123, China;

2. Staff Room of Mathematics, Department of Basic Theories, Army Officer Academy of PLA, Hefei 230031, China)

**Abstract:** In view of the existing fuzzy number comparison and ranking methods not consider or not meet the decision maker's risk preference, the author construct a consideration of fuzzy entropy and risk attitude ranking new indicators based on centroid. In considering the decision maker's attitude to risk basis is defined to express the risk attitude of decision-maker relative separation index, relative isolation and centroid based on information entropy, fusion of fuzzy numbers, constructed the ranking index is new, the dispersion index for fuzzy number ranking method of in-depth analysis and pointed out the inadequacies. Analysis results show that the rationality of new index ranking, the comparison and sorting method has more superiority.

**Keywords:** fuzzy numbers; risk attitudes; the relative degree of separation; fuzzy entropy; centroid

### 0 引言

自从 Zadeh 教授提出模糊集的概念以来, 模糊数学理论日益完善并被广泛应用于工程系统、经济系统以及社会系统等诸多领域。然而, 无论在模糊多属性决策还是模糊规划中, 模糊数的排序一直都是一个重要环节。虽然目前人们提出了多种模糊数的比较与排序的方法, 但是大多没有考虑或者不满足决策者的风险偏好。基于此, 笔者在前人<sup>[1-3]</sup>研究的基础上, 引入模糊熵<sup>[4]</sup>的概念, 定义了表征决策者风险态度的相对分离度, 构造了一种基于质心兼顾模糊熵以及风险态度的模糊数综合排序新指标, 并给出数值例子来说明文中排序方法的合理性和优越性。

### 1 模糊数的相对分离度

#### 1.1 模糊数

**定义 1** 设模糊数  $\tilde{A}(a, b, c, d; \omega)$  是定义在实数

集  $\mathbf{R}$  上的一个集合, 若其隶属函数为

$$f_{\tilde{A}(x)} = \begin{cases} \tilde{A}_L(x), & a \leq x \leq b \\ \omega, & b \leq x \leq c \\ \tilde{A}_R(x), & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

式中:  $\tilde{A}_L(x): [a, b] \rightarrow [0, \omega]$  为严格连续单调递增函数;  $\tilde{A}_R(x): [c, d] \rightarrow [0, \omega]$  为严格连续单调递减函数, 称  $\tilde{A}$  为一个模糊数。特别的, 当  $\omega=1$  时, 称  $\tilde{A}$  为一个正规模糊数; 当  $0 < \omega < 1$  时, 称  $\tilde{A}$  是一个非正规的模糊数。将实数域  $\mathbf{R}$  上的全体模糊集记为  $F(\mathbf{R})$ 。与单点分布的离散模糊变量相比, 模糊数其实就是分布在一定区间上的连续模糊变量。

#### 1.2 模糊数的质心

为比较模糊数大小, 许多学者基于模糊数的隶属函数来定义质心, 笔者采用文献[3]提出的质心公式:

收稿日期: 2015-05-16; 修回日期: 2015-06-28

作者简介: 张京亮(1989—), 男, 山东人, 硕士, 从事模糊数学与数据分析研究。

$$\bar{x}(A) = \frac{\int_a^b x f_A^L(x) dx + \int_b^c x \omega dx + \int_c^d x f_A^R(x) dx}{\int_a^b f_A^L(x) dx + \int_b^c \omega dx + \int_c^d f_A^R(x) dx}; \quad (1)$$

$$\bar{y}(A) = \frac{\int_0^\omega y(\tilde{A}^R(y) - \tilde{A}^L(y)) dy}{\int_0^\omega (\tilde{A}^R(y) - \tilde{A}^L(y)) dy}. \quad (2)$$

其中  $\tilde{A}^L, \tilde{A}^R$  分别为  $\tilde{A}_L(x), \tilde{A}_R(x)$  的反函数。文献[5]给出了一种基于模糊数质心的模糊数排序指标：

$$D(A) = 1/2 \mu(x)(|\bar{x}| + |\bar{y}| + |\bar{x} - \bar{y}|). \quad (3)$$

虽然式 (3) 一定程度上弥补了 Cheng<sup>[1]</sup>和 Chu 等<sup>[2]</sup>所提出的排序指标的不足，但是对于如图 1 中所示成对称分布的三角模糊数无法做出有效的排序。

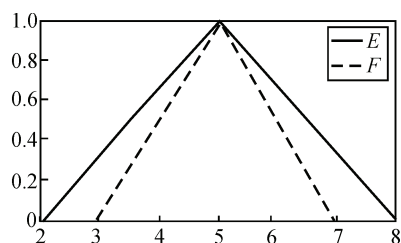


图 1 三角模糊数 E、F

### 1.3 模糊数的熵

在用模糊度量模糊集合不确定性时，全集中所有的元素隶属度和非隶属度都为 1/2 时，这些元素在属于这个集合和不属于这个集合两方面具有相同的程度，集合具有最大的不确定度。然而，显然不存在具有这样隶属函数的模糊变量。借鉴熵理论度量信息不确定程度，李平科<sup>[4]</sup>基于可信性理论，利用分析性质良好的 Shannon 函数  $S(t)$  定义了模糊数的熵来度量模糊数的不确定性：

定义 2 模糊数  $\tilde{A}$  的熵记为

$$H(\tilde{A}) = \frac{1}{(d-a)\ln 2} \int_a^d S(c(x)) dx, c(x) = \frac{1}{2} f_{\tilde{A}}(x).$$

需要指出的是：当模糊数退化到单点分布时，其熵也相应地趋近于零；另一方面，若模糊数的隶属函数趋近于函数  $f_{\tilde{A}}(x) \equiv 1$ ，则其熵也趋近于 1。但在这 2 种极限情形下的模糊变量都不是连续模糊变量。

### 1.4 模糊数的相对分离度

为解决如图 1 所示模糊数排序问题，周丽等<sup>[6]</sup>通过定义模糊数的权重面积  $S(\tilde{A})$  作为散度来对模糊数进一步排序；孟凡永等<sup>[7]</sup>则进一步分析了左、右离散度作为排序的指标。

目前学者们对于模糊数散度指标的定义大体上一致，然而对于散度用来排序的理解上却存在严重分歧甚至是背道而驰：周丽等<sup>[6]</sup>认为模糊数的散度越大越好，而顾翠伶、魏立力<sup>[8]</sup>则认为散度越小越好。究其原因，皆在于没有考虑决策者对于风险的喜好，未充分考虑决策者的风险态度。而且，不考虑决策者的风险态度，周丽等所提的排序准则也无法对图 2 所示模糊数做出有效的排序。

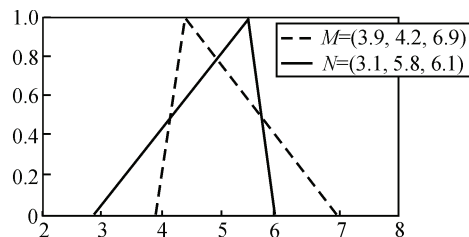


图 2 三角模糊数 M、N

对于图 3 中的 3 个三角模糊数，其距离指标与散度指标的关系如图 4。

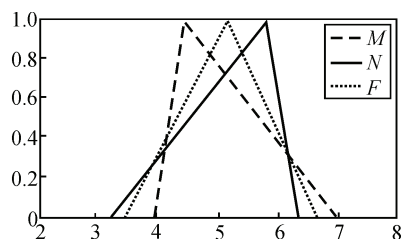


图 3 三角模糊数 M、N、F

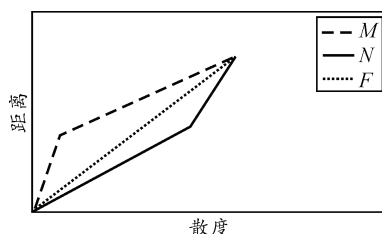


图 4 三角模糊数 M、N、F

分析发现，图 4 中距离与散度指标的关系和效用理论中效用函数刻画决策者的风险态度相一致。基于此，在离散度表征模糊数的模糊程度基础上，进一步考虑决策者的风险态度，对于风险偏好者而言，右离散度越大，决策效用越高；而风险厌恶型的决策者更加偏重左离散度。为此，在模糊数的左右离散度中加入表征决策者风险喜好的权重指标，定义模糊数的相对分离度如下：

$$C(\tilde{A}) = (1 - \beta) \int_0^\omega (0.5(b+c) - v_r(\alpha)) d\alpha + \beta \int_0^\omega (v_r(\alpha) - 0.5(b+c)) d\alpha.$$

其中  $\beta \in [0,1]$  表示决策者的风险态度。

## 2 基于风险态度综合排序指标

为解决现有的模糊数排序对散度指标作用认识上存在的分歧, 对于一组模糊数  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ , 把决策者预测的模糊数质心指标值定义为预测质心指标值, 用  $D$  表示, 预测后  $D$  就是一个固定不变的实数, 考虑决策者风险喜好, 基于相对分离度, 建立新的模糊数排序指标:

1) 决策者为风险厌恶型:

$$U(\tilde{A}_i) = \frac{D(\tilde{A}_i)}{D} + \frac{C(\tilde{A}_i)}{1-H(\tilde{A}_i)}.$$

2) 决策者为风险偏好型:

$$U(\tilde{A}_i) = \frac{D(\tilde{A}_i)}{D} + \frac{1-H(\tilde{A}_i)}{C(\tilde{A}_i)}.$$

根据给出的模糊数排序指标, 对于任意 2 个模糊数  $\tilde{A}_i, \tilde{A}_j$ , 笔者定义排序准则为:

1)  $U(\tilde{A}_i) < U(\tilde{A}_j) \Rightarrow \tilde{A}_i \prec \tilde{A}_j$ ;

2)  $U(\tilde{A}_i) > U(\tilde{A}_j) \Rightarrow \tilde{A}_i \succ \tilde{A}_j$ ;

3)  $U(\tilde{A}_i) = U(\tilde{A}_j) \Rightarrow \tilde{A}_i \approx \tilde{A}_j$ 。

文献[5]中给出的排序指标未考虑模糊数的离散度指标, 其实正是风险决策中的风险中性排序指标, 因此无法对形如图 1 的模糊做出排序。而文献[6,8]对散度指标得出相反的结论, 则是由于未对决策者的风险态度进行深入分析。

容易验证所提排序方法为全序, 满足以下几条性质:

1) 完全性:  $\tilde{A}_i \geq \tilde{A}_j$  和  $\tilde{A}_j \geq \tilde{A}_i$  至少有一个成立;

2) 自反性:  $U(\tilde{A}_i) = U(\tilde{A}_i)$ ;

3) 反对称性:  $U(\tilde{A}_i) \leq U(\tilde{A}_j)$  且  $U(\tilde{A}_i) \geq U(\tilde{A}_j)$ , 则

$\tilde{A}_i \approx \tilde{A}_j$ ;

4) 传递性:  $\tilde{A}_i \geq \tilde{A}_j, \tilde{A}_j \geq \tilde{A}_k$  则  $\tilde{A}_i \geq \tilde{A}_k$ ;

5) 不相关模糊变量的独立性: 在  $\{\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\}$  上有

$\tilde{A}_i \geq \tilde{A}_j$ , 则在  $\{\tilde{A}_i, \tilde{A}_j, \tilde{A}_k\}$  上仍有  $\tilde{A}_i \geq \tilde{A}_j$ 。

## 3 数值算例

下面通过数值例子说明文中提出的排序准则的合理性和有效性。

例 1 考虑如图 5 所示的 3 个模糊数:

$A = (0.4, 0.5, 1; 1)$ ,  $B = (0.4, 0.7, 1; 1)$ ,  $C = (0.4, 0.9, 1; 1)$ ,

比较它们的大小关系。

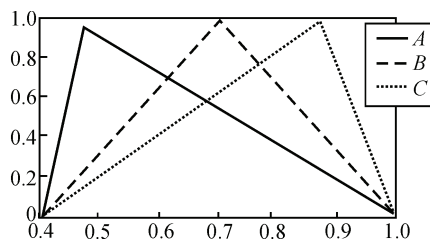


图 5 三角模糊数 A、B、C

用不同的方法对模糊数  $A, B, C$  进行比较, 排序的结果见表 1, 其中文中方法考虑风险厌恶 ( $\beta=0.4$ ) 和风险偏好 ( $\beta=0.6$ ) 2 种决策风险态度对模糊数进行排序。利用文中所提的方法对模糊数进行排序时, 风险偏好型排序结果与已有的排序方法一致, 说明文中方法是有效的; 而风险厌恶型排序结果与风险偏好型相反, 更加符合人们的直观感受。

表 1 模糊数 A、B、C 的排序结果

排序方法	A	B	C	排序结果
Cheng <sup>[1]</sup>	0.790 0	0.860 1	0.962 9	$A < B < C$
Yu-Jie Wang <sup>[9]</sup>	0.633 0	0.700 0	0.767 0	$A < B < C$
Zhao <sup>[5]</sup>	0.294 3	0.316 7	0.338 9	$A < B < C$
Chu <sup>[2]</sup>	0.211 0	0.233 0	0.256 0	$A < B < C$
风险厌恶型	1.479 0	1.472 8	1.466 6	$A > B > C$
风险偏好型	2.507 7	2.791 6	3.143 0	$A < B < C$

例 2, 对于例 1 中的 3 个模糊数, 其质心指标差别比较明显, 用现有的排序方法也能进行排序; 然而当模糊数的质心指标比较接近或者相等的时候, 现有的排序准则就无法对模糊数作出合理的排序了。如图 6, 其中  $E=(2,5,8;1)$ ,  $F=(3,5,7;1)$ ,  $M=(3.9,4.2,6.9;1)$ ,  $N=(3.1,5.8,6.1;1)$ 。

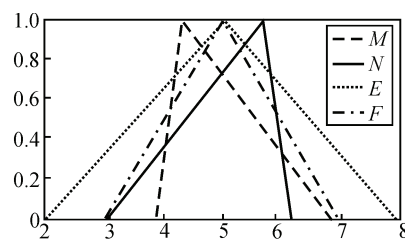


图 6 三角模糊数 E、F、M、N

现有的方法中, 不论是 Cheng 法、Yu-Jie Wang 法还是 Zhao 法、Chu 法, 都认为模糊数  $E$  与  $F$  相等; 而周丽的方法, 虽然给出了  $E, F$  的顺序, 其实是文中所讲的风险厌恶型的排序方案。与此同时, 周丽的方法因为未考虑决策者的风险偏好, 仍然无法对模糊数  $M, N$  做出合理的排序。利用文中的方法, 考虑风险偏好型的决策态度 ( $\beta=0.6$ ), 作出的排序如表 2 所示。

表 2 模糊数 E、F、M、N 的排序结果

E	F	M	N	排序结果
1.185 7	1.278 6	1.214 3	1.442 2	$E < M < F < N$

与现有的排序方法相比，文中的方法对于质心指标相同的模糊数，根据人们的风险偏好，给出了符合人们直觉的排序结果，弥补了现有方法的不足。

#### 4 结束语

笔者从模糊数的质心入手，结合模糊数的熵，并考虑决策者的风险态度对散度指标进行改进来定义了相对分离度，提出了基于决策者风险喜好的模糊数综合排序新指标。新的指标不仅对模糊数散度进行了改进，还考虑了模糊数的模糊程度以及决策者的风险偏好。实例说明了文中所提排序指标的合理性与优越性。笔者所提出的综合排序方法在一定程度上克服了现有方法的不足，并且考虑了决策者的风险态度，具有较强的现实意义。

#### 参考文献：

[1] Cheng C H. A New Approach for Ranking Fuzzy Numbers

\*\*\*\*\*

(上接第 23 页)

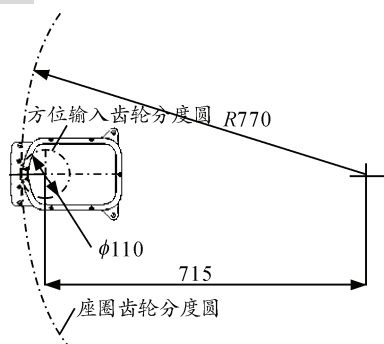


图 4 中心距校对图

#### 1.4.2 方位的安装面与座圈不平行

方位角度传感器的安装面是加工面，其平行度误差能保证在允许范围内，经实际测量其公差满足设计要求，两平面的平行度能得到有效保证。

根据上述分析，因座圈变形或游隙超差而引起方位角度传感器输入轴断裂的可能性较大。

#### 2 改进措施

结合上述分析，提出以下改进措施：

- 1) 更换输入轴材料，选用更好力学性能的 40Cr 作为输入轴材料。
- 2) 更换方位角度传感器在座圈上的安装位置，

by Distance Method[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95: 307-317.

[2] Chu T C, Tsao C T. Ranking Fuzzy Numbers with An area Between the Centroid Point and Original Point[J]. Comput. Math, 2002, 43: 111-117.

[3] Wang Y M, Yang J B, Xu D L, et al. On the Centroids of Fuzzy Numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(7): 919-926.

[4] 李平科. 模糊变量的熵[D]. 北京：清华大学，2005：21-39.

[5] 赵娟，刘琼荪. 一种基于模糊数中心的模糊数排序方法[J]. 模糊系统与数学，2008, 22(2): 142-146.

[6] 周丽，刘琼荪. 一种基于散度的模糊数排序方法[J]. 模糊系统与数学，2010, 24(3): 107-113.

[7] 孟凡永，曾雪兰，王飞，等. 基于  $\alpha$ -截集的模糊数排序方法研究[J]. 海南大学学报(自然科学版)，2008, 26(1): 21-25.

[8] 顾翠伶，魏立力. 基于模糊度地模糊数的排序及应用[J]. 统计与决策，2012(19): 91-94.

[9] Wang Y J, Lee H S. The Revised Method of Ranking Numbers with an Area between the Centroid and Original Points[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 55: 2033-2042.

将方位角度传感器安装到与身管呈 30°夹角的位置处，保证输入轴不直接承受射击后坐力。

3) 提高座圈加工精度，保证座圈的变形量和游隙在合理范围内。

#### 3 结论

改进后的方位角度传感器经过试验验证，能满足使用要求。通过多年批量生产，方位角度传感器未出现问题，效果良好。

#### 参考文献：

[1] 刘红廷. 随动系统方位传感器设计[C]. 北京：兵器工业出版社，2013：237-240.

[2] 成大先. 机械设计手册[M]. 北京：化学工业出版社，2004：5.

[3] 李永成.  $\times\times\times$ 诸元解算修正装置研制总结报告[R]. 2008：19-20.

[4] 杜平安. 有限元法-原理、建模及运用[M]. 北京：国防工业出版社，2004：10-12.

[5] 胡兴祥. 座圈错位问题分析及结构改进[C]. 北京：兵器工业出版社，2013：116-121.

[6] 郑晓鸣，安自朝，孙宝岩，等. 火炮液压开闭架机构力学分析[J]. 四川兵工学报，2014(2): 27-29.